LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Übungen zur Mathematischen Statistik
Blatt 8

1. **Doob-Zerlegung der Brownschen Brücke.** Es sei $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ eine standard Brownsche Brücke auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t = \sigma(Z_x : \ 0 \le x \le t))_{t\in[0,1]}$ die davon erzeugte Filtration. Zeigen Sie, dass

$$M_t := Z_t + \int_0^t \frac{Z_x}{1-x}\,dx, \quad 0 \le t < 1$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0\le t<1}$ ist. Zeigen Sie auch, dass es in $(L^2(\Omega, \mathcal{A}, P), \|\cdot\|_2)$ für $t \uparrow 1$ gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable konvergiert.

2. **Die Wilcoxon-Verteilung.** Es seien $(X_k)_{k=1,\ldots,n}$ reellwertige i.i.d. Zufallsvariablen mit einer unbekannten Verteilung P, die keine Atome besitzen soll (d.h. $P(\{a\}) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$). Insbesondere sind alle X_k fast sicher paarweise verschieden. Es sei σ “die” (fast sicher eindeutig bestimmte) zufällige Permutation von $\{1, \ldots, n\}$, für die $X_{\sigma(1)} \le X_{\sigma(2)} \le \ldots \le X_{\sigma(n)}$ gilt, die also die Datenpunkte aufsteigend anordnet. Weiter sei $k \in \{0, \ldots, n\}$.

   (a) Beweisen Sie, dass die Verteilung von

   $$W_{n,k} := \sum_{j=1}^{k} \sigma(j)$$

   nicht von P abhängt.

   (b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $W_{n,k}$.

3. **Verteilung des Maximums einer Brownschen Brücke.** Es sei $(Z_t)_{0\le t\le 1}$ eine standard Brownsche Brücke auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, realisiert als $Z_t = B_t - tB_1$ mit einer standard Brownschen Bewegung $(B_t)_{t\ge 0}$. Weiter sei $M = \max_{0\le t\le 1} Z_t$ das Maximum der Brownschen Brücke.

   (a) Zeigen Sie für $0 < \epsilon < a$:

   $$\{M \ge a + \epsilon, |B_1| \le \epsilon\} \subseteq \{\max_{0\le t\le 1} B_t \ge a, |B_1| \le \epsilon\} \subseteq \{M \ge a - \epsilon, |B_1| \le \epsilon\}$$

   Folgern Sie:

   $$P[M \ge a + \epsilon] \le P[\max_{0\le t\le 1} B_t \ge a \mid |B_1| \le \epsilon\}] \le P[M \ge a - \epsilon].$$

   Hinweis: Bekanntlich ist B_1 unabhängig von $(Z_t)_{0\le t\le 1}$.

   (b) Zeigen Sie

   $$\lim_{\epsilon\downarrow 0} P[\max_{0\le t\le 1} B_t \ge a \mid |B_1| \le \epsilon\}] = e^{-2a^2}$$

   Hinweis: Sie dürfen das Reflexionsprinzip für die Brownsche Bewegung

   $$P[\max_{0\le t\le 1} B_t \ge a, \ a - B_t \in A\}] = P[B_t - a \in A] \text{ für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+)$$

   ohne Begründung verwenden.

   (c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte von M.

Keine Abgabe. Studierende sollen ihre Lösungen in der Übungsstunde 9 präsentieren.