LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Übungen zur Mathematischen Statistik
Blatt 6

1. Sei $f > 0$ eine glatte Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$ mit endlicher Varianz, so dass $L(\theta, x) = f(x-\theta)$ alle Regularitätsvoraussetzungen erfüllt, die für die Anwedung des Satzes von Cramér-Rao benötigt werden. Gegeben sei eine i.i.d. Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$, deren Komponenten die Verteilung $P_\theta(dx) = f(x-\theta)\, dx$ mit einem unbekanntem $\theta \in \mathbb{R}$ besitzen. Wann gibt es einen effizienten Schätzer für θ, also einen erwartungstreuen Schätzer, für den die Cramér-Rao-Schranke scharf ist?

2. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. normalverteilte reellwertige Datenpunkte mit unbekanntem Erwartungswert θ und bekannter Varianz $\sigma^2 = 1$. Zeigen Sie, dass es keinen supereffizienten Schätzer $\hat{\theta}$ für θ gibt, also keinen Schätzer, der die Cramér-Rao-Schranke für alle θ unterschreitet.
Hinweis: Verwenden Sie die van Trees Ungleichung für a-priori Verteilungen $\mathbb{P}_\ell(d\theta) = \ell^{-1}\rho(\theta/\ell)\, d\theta$ mit einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsdichte ρ für ℓ genügend groß. Die genaue Wahl von ρ ist nicht wichtig; Sie können z.B. die Dichte der Standardnormalverteilung nehmen.

3. Für einen beliebigen Schätzer $\hat{\pi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei der *Bruchpunkt* $\mathrm{Bp}(\hat{\pi})$ wie folgt definiert:

$$\mathrm{Bp}(\hat{\pi}) := \sup \left\{ \alpha \geq 0 \;\middle|\; \forall \omega \in \mathbb{R}^n : \sup_{\substack{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^2: \\ |\{i:\, \omega_i \neq \tilde{\omega}_i\}| \leq \lceil \alpha n \rceil}} |\hat{\pi}(\omega_1, \ldots, \omega_n) - \hat{\pi}(\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n)| < \infty \right\}.$$

Das bedeutet: Der Bruchpunkt ist die Grenze des Anteils der Datenpunkte, die beliebig verfälscht werden können, ohne den Wert des Schätzers unbeschränkt zu verfälschen. Er ist eine Maßzahl für die Robustheit eines Schätzers unter Fehlern in den Datenpunkten.
Ein *Lageschätzer* ist ein Schätzer $\hat{\pi}$ mit

$$\hat{\pi}(\omega_1 + \beta, \ldots, \omega_n + \beta) = \hat{\pi}(\omega_1, \ldots, \omega_n) + \beta$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Ein *Breiteschätzer* vom Grad $\nu > 0$ ist ein Schätzer $\hat{\pi}$ mit

$$\hat{\pi}(\gamma\omega_1 + \beta, \ldots, \gamma\omega_n + \beta) = \gamma^\nu \hat{\pi}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$ und $\gamma > 0$. Wir nehmen $n \geq 3$ an.

(a) Berechnen Sie den Bruchpunkt für das Mittel $\overline{\omega} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega_i$ und die empirische Varianz $s_\omega^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (\omega_i - \overline{\omega})^2$,

(b) Überlegen Sie sich je einen Lage- und Breiteschätzer mit positivem Bruchpunkt.

(c) Zeigen Sie, dass der Bruchpunkt eines Lageschätzers nicht größer als $\frac{1}{2}$ sein kann.

Keine Abgabe. Studierende sollen ihre Lösungen in der Übungsstunde 7 präsentieren.