LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Übungen zur Mathematischen Statistik
Blatt 5

1. Es seien $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ (mit gegebenem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) i.i.d. normal(μ, σ^2)-verteilte Daten mit unbekannten μ und σ^2. Berechnen Sie die Cramér-Rao-Schranke für die Kovarianzmatrix von zugehörigen erwartungstreuen Schätzern $(\hat{\mu}, \widehat{\sigma^2})$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Kovarianzmatrix für $(\overline{X}, s_X^2)$, also dem Datenmittel und der empirischen Varianz.

2. Es seien $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ (mit gegebenem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) unabhängige, auf einem Intervall $[a, b]$ mit unbekannten Parametern $a < b$ uniform verteilte Beobachtungsdaten. Beweisen Sie, dass $(\min(X_1, \dots, X_n), \max(X_1, \dots, X_n))$ minimalsuffizient ist.

3. Es seien $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ (mit gegebenem $n \in \mathbb{N}$) unabhängige, auf einem Intervall $[0, \theta]$ mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$ uniform verteilte Beobachtungsdaten. P_θ bezeichne das zugrundeliegende Maß. Wir führen nun eine Bayessche Modellierung ein, indem wir annehmen, dass θ in einer vorhergehenden, 1. Stufe zufällig mit einer a-priori-Verteilung $\mathbb{P}$ gezogen wurde, die unbeschränkten Träger besitze.

   (a) Zeigen Sie, dass die a-posteriori-Verteilung von θ fast sicher durch
   $$\mathbb{P}^X(d\theta) = \frac{1}{Z(M)} 1_{\{\theta \geq M\}} \theta^{-n} \, \mathbb{P}(d\theta)$$
   gegeben wird, wobei
   $$M = \max(X_1, \dots, X_n),$$
   $$Z(M) = \int_{\{\theta \geq M\}} \theta^{-n} \, \mathbb{P}(d\theta).$$

   (b) Zeigen Sie, dass der Schätzer
   $$\hat{\theta}_n(X) = \frac{\int_{\{\theta \geq M\}} \theta^{-n-1} \, \mathbb{P}(d\theta)}{\int_{\{\theta \geq M\}} \theta^{-n-2} \, \mathbb{P}(d\theta)}$$
   einen minimalen a posteriori erwarteten quadratischen relativen Schätzfehler besitzt, d.h. für alle Schätzer $\hat{\theta}'(X)$ (ohne jede Regularitätsannahme) gilt $R(\hat{\theta}'(X)) \geq R(\hat{\theta}_n(X))$, wobei
   $$R(\hat{\theta}') := \int_{\{\theta \geq M\}} \frac{(\hat{\theta}'(X) - \theta)^2}{\theta^2} \, \mathbb{P}^X(d\theta).$$

   (c) Folgern Sie, dass auch der a priori erwartete quadratische relative Schätzfehler
   $$\mathrm{MSE}_{\mathbb{P}}(\hat{\theta}') := \int_{\mathbb{R}^+} E_{P_\theta} \left[\frac{(\hat{\theta}'(X) - \theta)^2}{\theta^2} \right] \mathbb{P}(d\theta)$$
   bei $\hat{\theta}_n$ minimal ist, also
   $$\mathrm{MSE}_{\mathbb{P}}(\hat{\theta}') \geq \mathrm{MSE}_{\mathbb{P}}(\hat{\theta}_n)$$
   für alle Schätzer $\hat{\theta}'$ gilt.

   (d) Folgern Sie für jeden Schätzer $\hat{\theta}'$:
   $$s(n, \hat{\theta}') := \sup_{\theta > 0} E_{P_\theta} \left[\frac{(\hat{\theta}'(X) - \theta)^2}{\theta^2} \right] \geq \mathrm{MSE}_{\mathbb{P}}(\hat{\theta}_n).$$

   (e) Welche untere Schranke für $s(n, \hat{\theta}')$ erhält man hieraus im Spezialfall $\mathbb{P}(d\theta) = 1_{\{\theta > 1\}} \alpha \theta^{-\alpha-1}$ mit $\alpha > 0$? Vergleichen Sie diese Schranke mit $s(n, M)$, indem Sie den Limes von $s(n, M) / \mathrm{MSE}_{\mathbb{P}}(\hat{\theta}_n)$ für $n \to \infty$ berechnen.

Keine Abgabe. Studierende sollen ihre Lösungen in der Übungsstunde 6 präsentieren.