LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Übungen zur Mathematischen Statistik
Blatt 4

1. Es seien X_1, X_2 unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit einer unbekannten Verteilung, die eine endliche, unbekannte Standardabweichung σ besitze.
   (a) Geben Sie ein statistisches Modell an, das die Situation beschreibt.
   (b) Beweisen Sie, dass es keinen erwartungstreuen Schätzer für σ gibt.

2. (a) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch normalverteilte Zufallsvariablen mit unbekannter Erwartung μ und unbekannter Varianz σ^2, wobei $n \geq 2$. P_{μ,σ^2} bezeichne das zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsmaß. Zeigen Sie, dass $\widehat{\sigma^2} := \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$ ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist.
   (b) Berechnen Sie den nach Rao-Blackwell verbesserten Schätzer gegeben die empirische Verteilung $P_{\text{emp}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k}$ der Daten, also die bedingte Erwartung $\widetilde{\sigma^2} := E_{P_{\mu,\sigma^2}}[\widehat{\sigma^2} | P_{\text{emp}}]$.
   (c) Berechnen Sie den erwarteten quadratischen Schätzfehler sowohl für den Ausgangsschätzer $\widehat{\sigma^2}$ als auch für den verbesserten Schätzer $\widetilde{\sigma^2}$, und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

3. (a) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, auf einem unbekannten Intervall $[a,b]$ uniform verteilte Zufallsvariablen, wobei $n \geq 2$. $P_{a,b}$ bezeichne das zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsmaß. Zeigen Sie: Der Mittelwert $\overline{X} = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Erwartung $(a+b)/2$ von X_1, und die empirische Varianz $s_X^2 = (n-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz $(b-a)^2/12$ von X_1.
   (b) Berechnen Sie die erwarteten quadratischen Schätzfehler
   $$\text{MSE}_{\overline{X}} = E_{P_{a,b}}\left[\left(\overline{X} - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$
   und
   $$\text{MSE}_{s_X^2} = E_{P_{a,b}}\left[\left(s_X^2 - \frac{(b-a)^2}{12}\right)^2\right].$$
   (c) Gegeben sei nun die suffiziente Statistik
   $$T = (m, M) := (\min\{X_1, \ldots, X_n\}, \max\{X_1, \ldots, X_n\}).$$
   Berechne Sie die Verteilung von T bezüglich $P_{a,b}$. Geben Sie dazu die Dichte von T bezüglich des Lebesguemaßes auf $[a,b]^2$ an.
   (d) Berechnen Sie die nach Rao-Blackwell verbesserten Schätzer $\widetilde{\overline{X}} := E_{P_{a,b}}[\overline{X}|T]$ und $\widetilde{s}_X^2 := E_{P_{a,b}}[s_X^2|T]$. Beachten Sie, dass Ihr Ergebnis zwar von T, aber nicht von den Parametern a und b abhängen darf.
   (e) Berechnen Sie auch die erwarteten quadratischen Schätzfehler der verbesserten Schätzer
   $$\text{MSE}_{\widetilde{\overline{X}}} = E_{P_{a,b}}\left[\left(\widetilde{\overline{X}} - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$
   und
   $$\text{MSE}_{\widetilde{s}_X^2} = E_{P_{a,b}}\left[\left(\widetilde{s}_X^2 - \frac{(b-a)^2}{12}\right)^2\right].$$
   (f) Überzeugen Sie sich davon, dass für $n > 2$ in der Tat
   $$\text{MSE}_{\widetilde{\overline{X}}} < \text{MSE}_{\overline{X}} \quad \text{und} \quad \text{MSE}_{\widetilde{s}_X^2} < \text{MSE}_{s_X^2}$$
   gilt, wie es der Satz von Rao-Blackwell erwarten läßt.

Keine Abgabe. Studierende sollen ihre Lösungen in der Übungsstunde 5 präsentieren.