LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Übungen zur Mathematischen Statistik
Blatt 2

1. *(Fortsetzung von Aufgabe 1, Blatt 1)* In einer Urne liegen n Kugeln (n bekannt), die rot, grün, blau oder gelb sein können. Es ist unbekannt, wieviele Kugeln von jeder Farbe vorhanden sind. Aus den gut gemischten Kugeln werden zufällig m Kugeln entnommen, und zwar

   (a) ohne Zurücklegen;

   (b) mit Zurücklegen.

   Man beobachtet die Liste $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ der Farben in der gezogenen Reihenfolge. Zeigen Sie in beiden Fällen, dass der Vektor

   $$T = \sum_{k=1}^{m} (1_{\{\omega_k = \text{rot}\}}, 1_{\{\omega_k = \text{grün}\}}, 1_{\{\omega_k = \text{blau}\}})$$

   der gezogenen Farbanzahlen suffizient ist.

2. In einer Urne liegt eine unbekannte Anzahl n von Kugeln, die mit den Nummern $1, \ldots, n$ beschriftet sind. Aus den gut gemischten Kugeln werden zufällig m Kugeln mit Zurücklegen entnommen und die Liste $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ der Nummern notiert. Es sei $T(\omega) = \max\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$.

   (a) Beschreiben Sie die Situation durch ein statistisches Modell.

   (b) *korrigierte Fassung:* Zeigen Sie, dass für jedes n die Beobachtung ω bedingt auf $T(\omega) = t$ (mit gegebenem t) die gleiche Verteilung hat wie ein uniform aus der Menge $\{(\omega_i)_{i=1,\ldots,m} \in \{1, \ldots, t\}^m | \; T(\omega) = t\}$ zufällig gezogenes Tupel.

   (c) Schließen Sie: T ist eine suffiziente Statistik.

3. *Kontinuierliche Variante der vorhergehenden Aufgabe:* Es wird eine Liste $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ von n unabhängigen, auf einem Intervall $[a, b]$ uniform verteilten Datenpunkten beobachtet, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, bekannt, aber a und b unbekannte reelle Zahlen seien. Weiter sei

   $$T(\omega) = (\max\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}, \min\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}).$$

   (a) Beschreiben Sie die Situation durch ein statistisches Modell.

   (b) Zeigen Sie, dass für jedes Intervall $[a, b]$ die Beobachtung ω bedingt auf $T(\omega) = (c, d)$ (mit gegebenen $c \geq d$) fast sicher die gleiche Verteilung hat wie der Vektor $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$ des folgenden Zufallsexperiments: $X_1, \ldots, X_{n-2}$ seien unabhängig und identisch uniform verteilt auf dem Intervall $[c, d]$, und $X_{n-1} = c$, $X_n = d$. Weiter sei σ eine von $X_1, \ldots, X_{n-2}$ stochastisch unabhängige, auf der Menge S_n aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ uniform verteilte zufällige Permutation.

   (c) Schließen Sie: T ist eine suffiziente Statistik.

4. Gegeben sei das statistische Modell $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ mit $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und

   $$\mathcal{P} := \{P_\sigma := \text{normal}(0, \sigma^2)^n | \; \sigma^2 > 0\}.$$

   Es beschreibt n unabhängige zentrierte normalverteilte Datenpunkte mit unbekannter Varianz. Weiter sei $T : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$, $T(\omega) = \sum_{k=1}^n \omega_k^2$. Zeigen Sie, dass für jedes $\sigma > 0$ die Gleichverteilung auf der Sphäre

   $$\sqrt{t} S^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n | T(\omega) = t\}$$

   eine Version der bedingten Verteilung $P_\sigma[\cdot | T = t]$, $t \geq 0$, ist. Folgern Sie, dass T eine suffiziente Statistik ist.

Keine Abgabe. Studierende sollen ihre Lösungen in der Übungsstunde 3 präsentieren.