LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Übungen zur Mathematischen Statistik
Blatt 1

1. In einer Urne liegen n Kugeln (n bekannt), die rot, grün, blau oder gelb sein können. Es ist unbekannt, wieviele Kugeln von jeder Farbe vorhanden sind. Aus den gut gemischten Kugeln werden zufällig m Kugeln entnommen. Man beobachtet die Farben inklusive ihrer Reihenfolge. Geben Sie ein statistisches Modell $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ an, das dieses Zufallsexperiment beschreibt.

2. Gegeben sei das statistische Modell $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ mit $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i} \,|\, n \in \mathbb{N},\ (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_0^+)^n,\ \sum_{i=0}^{n} p_i = 1 \right\}$$

die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße über $\mathbb{R}$ mit Träger in endlich vielen Punkten. Zeigen Sie, dass es kein dominierendes Wahrscheinlichkeitsmaß für $\mathcal{P}$ gibt.

3. Eine möglicherweise unfaire Münze wird n-mal (n bekannt) unabhängig voneinander geworfen. Man beobachtet eine zufällige Anzahl $\omega \in \{0, 1, \ldots, n\}$ von “Kopf” und $n - \omega$ von “Zahl”. Die unbekannte Wahrscheinlichkeit $\vartheta \in [0, 1]$ für “Kopf” in einem Wurf wird a priori als zufällig und auf $[0, 1]$ uniform verteilt angenommen.

   (a) Beschreiben Sie dieses Experiment durch ein Bayessches statistisches Modell.

   (b) Gegeben eine Beobachtung ω, bestimmen Sie die a-posteriori Verteilung $P_{n,\omega}$ von ϑ.

   (c) Zeigen Sie:
$$\lim_{n\to\infty} \max_{\omega \in \{0,1,\ldots,n\}} \mathrm{Var}_{P_{n,\omega}}(\vartheta) = 0.$$

4. In einer Urne liegen zwei weisse und zwei schwarze Kugeln. Aus den gut gemischten Kugeln werden zufällig zwei (ohne Zurücklegen) entnommen und in eine zweite Urne gelegt (“1. Stufe”). Es sei ϑ die Anzahl weisser Kugeln in der zweiten Urne. Dann werden aus dieser Urne zwei Kugeln zufällig mit Zurücklegen gezogen und die Anzahl ω weisser Kugeln darunter notiert (“2. Stufe”).

   (a) Beschreiben Sie dieses zusammengesetzte Zufallsexperiment durch ein Bayessches statistisches Modell, wobei die 1. Stufe die a-priori-Verteilung modellieren soll.

   (b) In der 2. Stufe wurden $\omega = 2$ weisse Kugeln beobachtet. Gegeben diese Beobachtung, berechnen Sie die a-posteriori Verteilung von ϑ.

5. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ mit abzählbarem $\mathcal{P}$. Geben Sie ein dominierendes Wahrscheinlichkeitsmaß μ für $\mathcal{P}$ an.

6. Eine Versicherung modelliert ihre Kunden in der Haftpflichtversicherung wie folgt:
Jeder Kunde meldet in einem Jahr eine Poisson(ϑ)-verteilte Anzahl ω von Schäden, wobei jeder Kunde ein eigenes, unbekanntes $\vartheta > 0$ besitzt. A priori nimmt die Versicherung an, dass ϑ zufällig und Gammaverteilt ist, d.h. ϑ besitzt die a-priori Verteilung

$$P_{s,\alpha}(d\vartheta) = \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} \vartheta^{s-1} e^{-\alpha\vartheta}\, d\vartheta$$

mit gegebenen $\alpha, s > 0$

   (a) Beschreiben Sie dieses Experiment durch ein Bayessches statistisches Modell.

   (b) Gegeben eine Beobachtung ω, zeigen Sie, dass die a-posteriori Verteilung von ϑ wieder von der Gestalt $P_{\tilde{s},\tilde{\alpha}}$ ist, und bestimmen Sie die a-posteriori Parameter $\tilde{s}(\omega)$ und $\tilde{\alpha}(\omega)$.

7. In einer Schachtel befinden sich n Kugeln, davon sind eine unbekannte Anzahl K rot, die übrigen $n-K$ sind grün. Wir setzen an, dass $K = k$ mit der "a–priori"–Wahrscheinlichkeit $p_k > 0$ vorliegt, $k = 0, \ldots, n$. Nun werden m Kugeln aus der Schachtel zufällig mit Zurücklegen entnommen; darunter sind L rote Kugeln. Das Wahrscheinlichkeitsmass P_m beschreibe dieses Zufallsexperiment. Wir wollen die relative Häufigkeit $\frac{K}{n}$ mit Hilfe der beobachteten relativen Häufigkeit $\frac{L}{m}$ schätzen:

   a) Berechnen Sie die "a–posteriori"–Verteilung von K, d. h. $P_m[K = k | L = l]$.

   b) Zeigen Sie:

$$\exists \alpha > 0 \; \exists C > 0 \; \forall m \in \mathbb{N} \; \forall l \in \{0, \ldots, m\} : \; P_m \left[\frac{L}{m} - \frac{K}{n} \geq \frac{1}{n} \;\middle|\; L = l \right] \leq C e^{-\alpha m}$$

   Hinweis: Es gelte $\frac{l}{m} - \frac{k}{n} \geq \frac{1}{n}$. Bemerken Sie zunächst

$$P_m[K = k | L = l] = P_m[K = k + 1 | L = l] \frac{p_k}{p_{k+1}} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{l}{m} \right)^m \quad ,$$

   wobei $f(p, 1, 1) := p$ und

$$f(p, p', \pi) := \left(\frac{p}{p'} \right)^{\pi} \left(\frac{1-p}{1-p'} \right)^{1-\pi} \qquad \text{für } 0 < p' < 1.$$

   Beweisen Sie dann $f(p, p', \pi) \leq f(p, p', p') < 1$ für $0 \leq p < p' \leq \pi \leq 1$. Leiten Sie hieraus eine in m exponentiell abfallende obere Schranke für $P_m[K = k | L = l]$ her.

   c) Folgern Sie:

$$\exists \alpha > 0 \; \exists C > 0 \; \forall m \in \mathbb{N} \; \forall l \in \{0, \ldots, m\} : \; P_m \left[\left| \frac{L}{m} - \frac{K}{n} \right| \geq \frac{1}{n} \;\middle|\; L = l \right] \leq C e^{-\alpha m}$$

   Hinweis: Verwenden Sie ein Symmetrieargument, das rote und grüne Kugeln vertauscht.

8. Der Kursverlauf $(X_t)_{t \in [0,1]}$ einer Aktie wird durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift

$$Y_t = \exp(\sigma B_t + r t)$$

   mit Parametern $\sigma > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ modelliert, wobei $(B_t)_{t \in [0,1]}$ eine standard Brownsche Bewegung bezeichnet. Mit $P_{\sigma,r}$ bezeichnen wir die Verteilung von $(Y_t)_{t \in [0,1]}$; es ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum Ω aller $\mathbb{R}^+$-wertigen stetigen Funktionen auf $[0, 1]$, versehen mit der von den Auswertungsfunktionalen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^+$, $X_t(\omega) = \omega(t)$, $(t \in [0, 1])$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}$.

   (a) Zunächst sei $\sigma > 0$ fixiert. Beweisen Sie, dass $P_{\sigma,0}$ ein dominierendes Wahrscheinlichkeitsmaß für $\mathcal{P}_\sigma := \{P_{\sigma,r} | \; r \in \mathbb{R}\}$ ist und geben Sie Dichten $dP_{\sigma,r}/dP_{\sigma,0}$ für alle $r \in \mathbb{R}$ an.

   (b) Beweisen Sie, dass $\mathcal{P} := \{P_{\sigma,r} | \; \sigma > 0, \; r \in \mathbb{R}\}$ kein dominierendes Wahrscheinlichkeitsmaß besitzt.

Keine Abgabe. Studierende sollen ihre Lösungen in den Übungsstunden präsentieren. Aufgaben 1–4 sind zur Besprechung in der 1. Übungsstunde gedacht, Aufgaben 5–8 zur Besprechung in der 2. Übungsstunde.