Gaußsches Integral und Stirling-Formel

Lemma 0.1 (Gaußsches Integral) *Es gilt für alle $a > 0$:*

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}} \tag{1}$$

Beweis: Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ax^2} e^{-ay^2}\,dx\,dy \quad \text{(mit dem Satz von Fubini)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\}), \\
&f(r, \phi) = (x, y) \quad \text{mit} \\
&x = r\cos\phi, \\
&y = r\sin\phi
\end{aligned}$$

Die Abbildung f ist ein Diffeomorphismus (also stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrung) mit der Jacobimatrix

$$Df(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

und der Jacobideterminante

$$\det Df(r, \phi) = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r.$$

Der Wertebereich $W(f) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\})$ von f unterscheidet sich von $\mathbb{R}^2$ nur um die positive x-Achse $\mathbb{R}_0^+ \times \{0\}$, die den Flächeninhalt 0 besitzt. Es folgt mit der Transformationsformel:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_{W(f)} e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[} e^{-a((r\cos\phi)^2+(r\sin\phi)^2)}\,r\,dr\,d\phi \\
&= \int_{\mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[} e^{-ar^2}\,r\,dr\,d\phi \\
&= \int_0^\infty e^{-ar^2}\,r\,dr \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\pi \int_0^\infty e^{-ar^2}\,r\,dr.
\end{aligned}$$

Wir substituieren $u = ar^2$, $du/dr = 2ar$ und erhalten

$$2\pi \int_0^\infty e^{-ar^2}\, r\, dr = \frac{\pi}{a} \int_0^\infty e^{-u}\, du = \frac{\pi}{a}.$$

Man beachte, dass hier $a > 0$ verwendet wird. Damit ist gezeigt:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\, dx \right)^2 = \frac{\pi}{a}$$

also nach Wurzelziehen die Behauptung, da das Integral positiv ist.

Lemma 0.2 (Asymptotik des mittleren Binomialkoeffizienten) *Es gilt:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\pi n}}{2^{2n}} \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right) = 1} \tag{2}$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt nach der binomischen Formel

$$\begin{aligned} 2^{2n} \cos^{2n} x = (2\cos x)^{2n} &= (e^{ix} + e^{-ix})^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\begin{array}{c} 2n \\ k \end{array} \right) e^{ikx} e^{-i(2n-k)x} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\begin{array}{c} 2n \\ k \end{array} \right) e^{2i(k-n)x}. \end{aligned}$$

Integrieren wir von $-\pi/2$ bis $\pi/2$:

$$2^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = \sum_{k=0}^{2n} \left(\begin{array}{c} 2n \\ k \end{array} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2i(k-n)x}\, dx$$

Das Integral im mittleren Summanden, $k = n$, lautet

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2i(n-n)x}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\, dx = \pi.$$

Alle anderen Summanden, $k \neq n$, verschwinden, denn hier gilt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2i(k-n)x}\, dx = \left[\frac{e^{2i(k-n)x}}{2i(k-n)} \right]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

wegen der π-Periodizität von $x \mapsto e^{2i(k-n)x}$. Damit ist gezeigt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = 2^{-2n} \pi \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right). \tag{3}$$

Wir werten das letzte Integral asymptotisch auch anders aus, indem wir es mit einem Gaußschen Integral vergleichen: Für $-\pi/2 < x < \pi/2$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\cos^{2n} x \leq e^{-nx^2}$$

Das sieht man so: Wegen der Symmetrie des Kosinus reicht es, $0 \leq x < \pi/2$ zu betrachten. Für diese x gilt $\cos x > 0$ und

$$\log\cos x = -\int_0^x \tan u\, du \leq -\int_0^x u\, du = -\frac{x^2}{2}$$

wegen

$$\frac{d}{dx}\log\cos x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

und $\tan u \geq u$ für $0 \leq u < \pi/2$. Es folgt

$$\cos^{2n} x = e^{2n\log\cos x} \leq e^{-2n\frac{x^2}{2}} = e^{-nx^2}. \tag{4}$$

Wir erhalten:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-nx^2}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Zusammen ergibt das

$$2^{-2n}\pi \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \leq \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

anders geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Um zu sehen, dass diese Formel asymptotisch für $n \to \infty$ sogar scharf ist, betrachten wir die Substitution $u = \sqrt{n}x$ und erhalten

$$\sqrt{n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = \int_{\mathbb{R}} 1_{]-\sqrt{n}\pi/2,\sqrt{n}\pi/2[}(u)\cos^{2n}\frac{u}{\sqrt{n}}\, du, \tag{5}$$

wobei wir die Integralgrenzen nun mit einer Indikatorfunktion

$$1_A(u) := \begin{cases} 1 & \text{für } u \in A \\ 0 & \text{für } u \notin A \end{cases}$$

geschrieben haben. Der Integrand besitzt wegen der Abschätzung (4) eine integrierbare Majorante:

$$0 \leq 1_{]-\sqrt{n}\pi/2,\sqrt{n}\pi/2[}(u)\cos^{2n}\frac{u}{\sqrt{n}} \leq \exp\left(-n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2\right) = e^{-u^2}.$$

Er konvergiert auch punktweise gegen diese obere Schranke, also

$$\lim_{n\to\infty} 1_{]-\sqrt{n}\pi/2,\sqrt{n}\pi/2[}(u)\cos^{2n}\frac{u}{\sqrt{n}} = \exp\left(-n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2\right) = e^{-u^2}$$

für alle $u \in \mathbb{R}$. Um das zu sehen, verwenden wir die Taylorentwicklung

$$\log \cos x = -\frac{x^2}{2} + r(x)$$

mit einem Restterm $r(x)$ mit $\lim_{x \to 0} x^{-2} r(x) = 0$. Es folgt für $n > (2|u|/\pi)^2$:

$$\begin{aligned} 1_{]-\sqrt{n}\pi/2, \sqrt{n}\pi/2[}(u) \cos^{2n} \frac{u}{\sqrt{n}} &= e^{2n \log \cos \frac{u}{\sqrt{n}}} \\ &= \exp\left(-2n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2 + 2nr\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-u^2}. \end{aligned}$$

Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{]-\sqrt{n}\pi/2, \sqrt{n}\pi/2[}(u) \cos^{2n} \frac{u}{\sqrt{n}} \, du = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \, du = \sqrt{\pi}$$

Fassen wir zusammen: Mit den Formeln (3) und (5) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n} &= \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} 1_{]-\sqrt{n}\pi/2, \sqrt{n}\pi/2[}(u) \cos^{2n} \frac{u}{\sqrt{n}} \, du \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

Die folgende Stirling-Formel liefert eine Näherungsformel für die Fakultätsfunktion:

Lemma 0.3 (Stirling-Formel) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\boxed{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \le n! \le \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n}}} \tag{6}$$

Insbesondere folgt:

$$\boxed{\frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} \tag{7}$$

Beweis: Vereinfacht gesagt beruht der Beweis auf der Approximation der Summe

$$\log n! = \sum_{m=1}^{n} \log m$$

durch das Integral

$$\int_1^n \log x \, dx.$$

Dabei wird

$$\sum_{m=1}^{n} \log m - \frac{1}{2}(\log 1 + \log n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2}[\log m + \log(m+1)]$$

als eine Summe von Trapezflächen interpretiert.

Daher verwenden wir als ein Hilfmittel die Trapezregel zur numerischen Integration mit verschiedenen Darstellungen des Restglieds.[1]

Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ glatt, so erhalten wir mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= [(x-\tfrac{1}{2})f(x)]_{x=0}^1 - \int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx. \end{aligned} \tag{8}$$

Nun gilt einerseits, nochmals mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx &= [\tfrac{1}{2}(x^2-x)f'(x)]_{x=0}^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2-x)f''(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\,dx,\end{aligned}$$

also in (8) eingesetzt:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \tfrac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\,dx. \tag{9}$$

Ist f konkav, also $f'' \leq 0$, so eignet sich diese Restglieddarstellung gut für eine untere Schranke des Integrals, da die Gewichtsfunktion $x(1-x)$ nichtnegative Werte annimmt. Für obere Schranken ist sie in unserem Fall weniger gut geeignet. Wir können aber die Integrationskonstante[2] bei der zweiten partiellen Integration auch alternativ so wählen, dass ein zu $f'(1)-f'(0)$ proportionaler Randterm entsteht.[3]

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx &= [\tfrac{1}{2}(x^2-x+\tfrac{1}{6})f'(x)]_{x=0}^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2-x+\tfrac{1}{6})f''(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{12}[f'(1)-f'(0)] - \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2-x+\tfrac{1}{6})f''(x)\,dx.\end{aligned} \tag{10}$$

Für unsere gewünschten Quadraturfehlerschranken ist die Gewichtsfunktion $x^2-x+\frac{1}{6}$ im letzten Integranden immer noch nicht gut geeignet, da sie kein einheitliches Vorzeichen

[1] Man kann die folgende Rechnung auch als eine Herleitung der ersten Instanzen der Euler-McLaurinschen Summenformel auffassen.

[2] Die Integrationskonstante bei den in den Stammfunktionen verwendeten Polynomen

$$B_1(x) = x - \tfrac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{6}, \quad B_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x$$

ist dabei jeweils so gewählt, daß $\int_0^1 B_j(x)\,dx = 0$ für $j = 1,2,3$ gilt. Die Polynome $B_j(x)$ heißen auch *Bernoulli-Polynome*.

[3] Beim Aufsummieren zur iterierten Trapezregel liefert dieser Randterm eine Teleskopsumme. Davon machen wir später Gebrauch.

besitzt. Deshalb integrieren wir das letzte Integral zwei weitere Male partiell:

$$\int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2 - x + \tfrac{1}{6}) f''(x)\, dx = [\tfrac{1}{6}(x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x) f''(x)]_{x=0}^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{6}(x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x) f'''(x)\, dx$$
$$= -\int_0^1 \tfrac{1}{6}(x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x) f'''(x)\, dx$$
$$= -[\tfrac{1}{24}(x^4 - 2x^3 + x^2) f'''(x)]_{x=0}^1 + \int_0^1 \tfrac{1}{24}(x^4 - 2x^3 + x^2) f''''(x)\, dx$$
$$= -\int_0^1 \tfrac{1}{24} x^2(1-x)^2 f''''(x)\, dx.$$

Man beachte, dass die Gewichtsfunktion $x^2(1-x)^2$ im Integranden nun nichtnegativ ist. In (10) eingesetzt erhalten wir:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \tfrac{1}{2}[f(0) + f(1)] + \frac{1}{12}[f'(0) - f'(1)] + \int_0^1 \tfrac{1}{24} x^2(1-x)^2 f''''(x)\, dx. \tag{11}$$

Die beiden Formeln (9) und (11) kann man als Trapezregel mit zwei verschiedenen Darstellungen des Restglieds auffassen. Wir verwenden diese beiden Formeln für eine obere bzw. untere Schranke des Trapezregel-Quadraturfehlers

$$R_n := \int_n^{n+1} \log t\, dt - \tfrac{1}{2}[\log n + \log(n+1)].$$

Wenden wir also die beiden Formeln (9) und (11) auf $f(x) = \log(x+n)$, $f'(x) = 1/(x+n)$, $f''(x) = -(x+n)^{-2} < 0$ und $f''''(x) = -6(x+n)^{-4} < 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ an. Zunächst mit Formel (9):

$$\int_n^{n+1} \log t\, dt = \int_0^1 \log(x+n)\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}[\log n + \log(n+1)] + \tfrac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)(x+n)^{-2}\, dx$$
$$\geq \tfrac{1}{2}[\log n + \log(n+1)],$$

wobei wir verwendet haben, dass der Integrand $x(1-x)(x+n)^{-2}$ im letzten Integral nichtnegativ ist. Andererseits mit Formel (11):

$$\int_n^{n+1} \log t\, dt = \int_0^1 \log(x+n)\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}[\log n + \log(n+1)] + \tfrac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \int_0^1 \tfrac{1}{4} x^2(1-x)^2(x+n)^{-2}\, dx$$
$$\leq \tfrac{1}{2}[\log n + \log(n+1)] + \tfrac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

wobei wir auch hier die Nichtnegativität des Integranden $\tfrac{1}{4}x^2(1-x)^2(x+n)^{-2}$ verwendet haben. Zusammen ist damit gezeigt:

$$0 \leq R_n \leq \tfrac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \tag{12}$$

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n := \log n! - (n + \tfrac{1}{2}) \log n + n = \log \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}.$$

Um die Quadraturfehler R_n in einer Teleskopsumme aufzusummieren, schreiben wir sie wie folgt als Differenzen:

$$\begin{aligned}
R_n &= \int_n^{n+1} \log t \, dt - \tfrac{1}{2}[\log n + \log(n+1)] \\
&= [(n+1)\log(n+1) - (n+1)] - [n \log n - n] - \tfrac{1}{2}[\log n + \log(n+1)] \\
&= [\log n! - (n + \tfrac{1}{2}) \log n + n] - [\log(n+1)! - (n + 1 + \tfrac{1}{2}) \log(n+1) + (n+1)] \\
&= L_n - L_{n+1},
\end{aligned}$$

wobei wir $\log(n+1)! - \log n! = \log(n+1)$ verwendet haben. Summieren wir R_n für $n = n_1, \dots, n_2 - 1$ mit natürlichen Zahlen $n_1 < n_2$ als Teleskopsumme auf verwenden die Quadraturfehlerschranken (12):

$$\begin{aligned}
0 \le \sum_{n=n_1}^{n_2-1} R_n &= \sum_{n=n_1}^{n_2-1} (L_n - L_{n+1}) = L_{n_1} - L_{n_2} \\
&\le \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \tfrac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \tfrac{1}{12} \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

Insbesondere ist $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Cauchyfolge, also konvergent:

$$L := \lim_{n \to \infty} L_n \in \mathbb{R}.$$

Aus (13) erhalten wir im Limes $n_2 \to \infty$ für alle $n = n_1 \in \mathbb{N}$:

$$0 \le L_n - L \le \frac{1}{12n}. \tag{14}$$

Um die Konstante L zu identifizieren, verwenden wir die Asymptotik des mittleren Binomialkoeffizienten aus Lemma 0.2 wie folgt:

$$\exp(L_{2n} - 2L_n) = \frac{(2n)!}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}} \frac{(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n})^2}{(n!)^2} = \sqrt{\frac{n}{2}} 2^{-2n} \binom{2n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

also

$$L = \lim_{n \to \infty} (2L_n - L_{2n}) = \log \sqrt{2\pi}.$$

Die Schranken (14) lauten damit

$$0 \le L_n - \log \sqrt{2\pi} = \log \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \le \frac{1}{12n},$$

woraus die Stirlingformel (6) folgt.