Numerischer Vergleich beim fairen Münzwurf

Schranke nach quadratischer Tschebyscheff-Ungleichung:

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\epsilon\right]\leq\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Schranke nach exponentieller Tschebyscheff-Ungleichung:

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\epsilon\right]\leq\exp(nh(p,p+\epsilon))+\exp(nh(p,p-\epsilon)),$$

wobei

$$h(p,q)=q\log\frac{p}{q}+(1-q)\log\frac{1-p}{1-q}$$

Exakt:

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\epsilon\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}1_{\{|\frac{k}{n}-p|\geq\epsilon\}}$$

Numerisches Beispiel: $p=\frac{1}{2}$, $\epsilon=\frac{1}{10}$:

n	quadrat.	exp.	exakt
10	2.5	$1.63524\ldots$	$0.753906\ldots$
100	0.25	$0.267027\ldots$	$0.0568879\ldots$
1000	0.025	$3.59988\ldots\cdot 10^{-9}$	$2.72846\ldots\cdot 10^{-10}$
10000	0.0025	$7.13848\ldots\cdot 10^{-88}$	$1.74043\ldots\cdot 10^{-89}$

Es fällt auf, dass hier die Schranke nach der exponentiellen Tschebyscheff-Ungleichung die richtige Größenordnung liefert, während die quadratische Tschebyscheff-Ungleichung hier oft um viele Größenordnungen gröber ist.