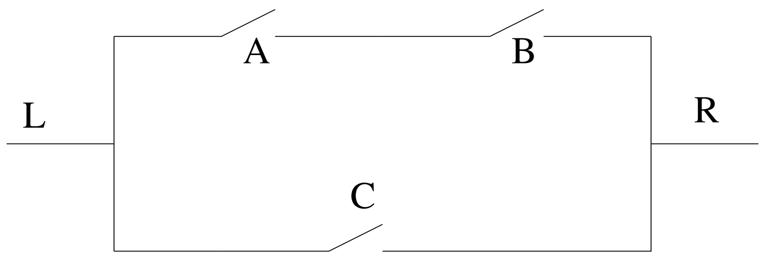
Prof. F. Merkl
23. Mai 2016

Sammlung alter Klausuraufgaben zur Stochastik

keine Abgabe – keine Besprechung in den Tutorien

Zu Ihrer Information und als zusätzliches Übungsmaterial sind hier die Aufgaben von vier meiner Klausuren zur Stochastik aus früheren Semestern zusammengestellt. Beachten Sie bitte, dass die Stoffauswahl in jenen Semestern sich etwas von der Stoffauswahl in der laufenden Vorlesung unterscheidet!

1. Im folgenden elektrischen Schaltnetz seien die Schalter A, B und C unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit p stromdurchlässig.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit q kann Strom vom linken Ende L zum rechten Ende R des Netzwerks fließen? Schreiben Sie die Antwort in der Form

$$q = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

$q =$ $\boxed{}$

Begründung (2 Punkte):

2. Eine Urne enthält ursprünglich eine rote und eine blaue Kugel. Man entnimmt zufällig eine Kugel und legt sie zusammen mit einer neuen Kugel der gleichen Farbe zurück in die Urne. Dann entnimmt man zufällig eine weitere Kugel und legt sie zusammen mit einer weiteren neuen Kugel der gleichen Farbe zurück in die Urne. Schließlich entnimmt man zufällig eine dritte Kugel. Wir beobachten, dass unter den drei gezogenen Kugeln eine rot und zwei blau sind. Bedingt auf diese

Beobachtung, mit welcher Wahrscheinlichkeit p stammt die rote gezogene Kugel aus dem ersten Zug? Schreiben Sie die Antwort als gekürzten Bruch in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

$$p = \boxed{}$$

Begründung (2 Punkte):

3. Es seien $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ die Gleichverteilung auf dem Dreieck $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0, \ x + y < 1\}$. Weiter bezeichnen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste bzw. zweite Koordinate. Berechnen Sie die Covarianz $\mathrm{Cov}_P(X,Y)$ zwischen X und Y. Schreiben Sie die Antwort als gekürzten Bruch in folgendes Feld:

   Antwort (2 Punkte):

   $$\mathrm{Cov}_P(X,Y) = \boxed{}$$

   Begründung (2 Punkte):

4. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge von Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die Zufallsvariable X_1 besitze die Dichte $f(x) = 1_{[0,\infty[}(x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, bezüglich des Lebesguemaßes. Weiter sei eine Zahl $a > 1$ gegeben. Leiten Sie aus der exponentiellen Tschebyscheff-Ungleichung eine *möglichst kleine* obere Schranke für

   $$q_n(a) := P[X_1 + \ldots + X_n \geq na], \quad n \in \mathbb{N}$$

   her. Folgern Sie daraus eine *möglichst kleine* obere Schranke für

   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_n(a).$$

   Schreiben Sie die Antwort in folgendes Feld:

   Antwort (2 Punkte):

   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_n(a) \leq \boxed{}$$

   Begründung (2 Punkte):

5. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein statistisches Modell, $H_0 = \{P_0\} \subset \mathcal{P}$ eine einfache Nullhypothese, $H_1 = \{P_1\} \subset \mathcal{P}$ eine davon verschiedene einfache Alternative, so dass P_1 bezüglich P_0 eine Dichte $L = dP_1/dP_0$ besitzt. Wir nehmen an, dass die Verteilung $\mathcal{L}_{P_0}(L)$ des Likelihood-Quotienten L bezüglich P_0 eine Dichte f bezüglich des Lebesguemaßes besitzt. Es bezeichne $p : \Omega \to \mathbb{R}$ den p-Wert der Likelihood-Quotienten-Tests (Neyman-Pearson-Tests) zu diesen beiden Hypothesen. Welche der folgenden Aussagen A-E ist in jedem Fall richtig? (*Hinweis:* Es ist genau eine der fünf Aussagen.)

   A Die Verteilung $\mathcal{L}_{P_0}(p)$ des p-Werts bezüglich der Nullhypothese besitzt die Dichte f bezüglich des Lebesguemaßes.

   B Die Verteilung $\mathcal{L}_{P_1}(p)$ des p-Werts bezüglich der Alternative besitzt die Dichte f bezüglich des Lebesguemaßes.

   C Der p-Wert ist bezüglich der Nullhypothese auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ uniform verteilt.

   D Der p-Wert ist bezüglich der Alternative auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ uniform verteilt.

   E Keine der Aussagen A-D ist richtig.

   Schreiben Sie die Antwort in folgendes Feld:

   Antwort (2 Punkte):

   Die Aussage $\boxed{}$ ist in jedem Fall richtig.

   Begründung (2 Punkte):

6. Es seien X und Y zwei unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen, die nicht den Wert 0 annehmen. Berechnen Sie eine Dichte f der Verteilung der Zufallsvariable

$$Z = \frac{X^2}{X^2 + Y^2}$$

   bezüglich des Lebesguemaßes.
   Hinweis: Es empfiehlt sich, zuerst die gemeinsame Dichte von (X^2, Y^2) und dann die gemeinsame Dichte von $(Z, X^2 + Y^2)$ zu bestimmen.

   Schreiben Sie die Antwort in folgendes Feld:

   Antwort (2 Punkte):

$$f(z) = \boxed{}, z \in \mathbb{R}.$$

Begründung (2 Punkte):

7. Die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, X_4 auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien iid standardnormalverteilt. Wir setzen

$$Y = X_1^2 + X_2^2 \quad \text{und} \quad Z = X_3^2 + X_4^2.$$

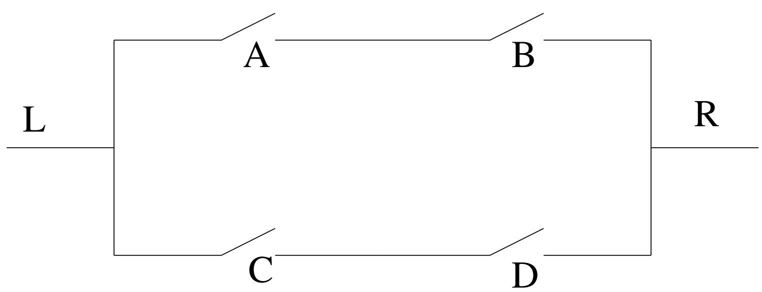
Bestimmen Sie die Covarianz $\mathrm{Cov}_P(Y, Z)$ zwischen Y und Z. Schreiben Sie die Antwort *in möglichst einfacher Form* in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

$$\mathrm{Cov}_P(Y, Z) = \boxed{\qquad}$$

Begründung (2 Punkte):

8. Im folgenden elektrischen Schaltnetz seien die Schalter A, B, C und D unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/3 stromdurchlässig.



Man beobachtet, daß Strom vom linken Ende L zum rechten Ende R des Netzwerks fließen kann. Bedingt auf diese Beobachtung, mit welcher Wahrscheinlichkeit q ist der Schalter A stromdurchlässig? Schreiben Sie die Antwort als gekürzten Bruch in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

$$q = \boxed{\qquad}$$

Begründung (2 Punkte):

9. Eine punktförmige Lichtquelle im Ursprung $0 \in \mathbb{R}^2$ der Ebene $\mathbb{R}^2$ sendet ein Photon (Lichtquant, hier modelliert als punktförmiges Teilchen) mit einem zufälligen Geschwindigkeitsvektor V aus. Das Photon

bewegt sich auf einem geraden Lichtstrahl mit Lichtgeschwindigkeit 1 vom Ursprung weg. Der Geschwindigkeitsvektor V sei bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P gleichverteilt auf der Einheitskreislinie $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Es bezeichne A das Ereignis, dass das Photon irgendwann die Gerade $\{2\} \times \mathbb{R}$ trifft. Weiter sei $(2, Z)$ der Auftreffpunkt, falls das Ereignis A eintritt, und $Z = 0$ sonst. Berechnen Sie die Dichte f von Z bedingt auf A, also die Dichte von $\mathcal{L}_{P[\cdot|A]}(Z)$ bezüglich des Lebesguemaßes. Schreiben Sie die Antwort *als vereinfachten Term* in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

$f(z) = \boxed{}, z \in \mathbb{R}$

Begründung (2 Punkte):

10. *Bei dieser Aufgabe werden nur die Antworten, jedoch keine Begründungen verlangt. Tragen Sie Ihre Antworten in die Antwortfelder ein. Bei jedem dieser Felder ist 1/2 Punkt erreichbar.*

Martin hat zwei Münzen. Er wirft jede Münze einmal und beobachtet bei beiden Würfen "Kopf". Es soll die Nullhypothese getestet werden "Beide Münzen liefern mit derselben Wahrscheinlichkeit Kopf" gegen die Alternative "Die beiden Münzen liefern mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten Kopf". Die Nullhypothese soll verworfen werden, wenn die beiden Münzwürfe verschiedene Ergebnisse liefern.

a) Beschreiben Sie die Situation durch ein geeignetes statistisches Modell $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

$\Omega = \boxed{}$ $\mathcal{A} = \boxed{}$

$\mathcal{P} = \boxed{}$

b) Formulieren Sie formal das Testproblem und den beschriebenen Test,

d.h. geben Sie *formal* die Nullhypothese H_0, die Alternativhypothese

H_1 und den Verwerfungsbereich V an.

$H_0 =$ $\boxed{}$

$H_1 =$ $\boxed{}$

$V =$ $\boxed{}$

c) Berechnen Sie das Signifikanzniveau α des Tests als gekürzten Bruch.

$\alpha =$ $\boxed{}$

d) Führen Sie den Test für Martins Beobachtung aus.

Testentscheid: $\boxed{}$

11. Jemand beobachtet die Wartezeiten $T_1, T_2, \ldots, T_9$ zwischen den ersten zehn Anrufen in einer Telefonzentrale. Wir nehmen an, dass diese Wartezeiten iid exponentialverteilt mit einem unbekannten Parameter $\theta > 0$ sind. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\theta}$ für θ.

    Antwort (2 Punkte):

    $\hat{\theta} =$ $\boxed{}$

    Begründung (2 Punkte):

12. **(4 Punkte)** Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge von uniform auf $]0,1[$ verteilten Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie: P-fast sicher gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log X_n}{\log n} \geq -1$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst für alle $\varepsilon > 0$:

$$P\left[\liminf_{n\to\infty} \frac{\log X_n}{\log n} \geq -1-\epsilon\right] = 1.$$

Erinnern Sie sich dazu an das 1. Lemma von Borel-Cantelli.

13. $(1+1+2=4$ Punkte)

    In einer Urne liegen zwei rote, eine grüne und eine blaue Kugel. Anna zieht dreimal mit Zurücklegen eine Kugel. Sie erhält R rote, G grüne und B blaue Kugeln.

    (a) Beschreiben Sie das Zufallsexperminent durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und geben Sie die Interpretation von $\omega \in \Omega$ an.

    (b) Berechnen Sie $E_P[B-R]$.

    (c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}_P[B-R]$.

14. $(1+3=4$ Punkte)

    (a) Formulieren Sie die Transformationsformel für Wahrscheinlichkeitsdichten unter Diffeomorphismen.

    (b) Die Zufallsvariablen R und U seien unabhängig voneinander. R besitze die Wahrscheinlichkeitsdichte

    $$f_R(r) = 2r\, 1_{]0,1[}(r), \quad r \in \mathbb{R}$$

    bezüglich des Lebesguemaßes. U sei auf $]0,1[$ uniform verteilt. Sei

    $$X = R\cos\left(\tfrac{\pi}{2}U\right) \qquad \text{und} \qquad Y = R\sin\left(\tfrac{\pi}{2}U\right).$$

    Bestimmen Sie die Dichte des Zufallvektors (X,Y) bezüglich des Lebesguemaßes λ_2 auf $\mathbb{R}^2$.

    Hinweis: Eigenschaften der Polarkoordinaten dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

15. $(1+2+1=4$ Punkte)

    (a) Formulieren Sie den Satz von Bayes.

    (b) Zwei Urnen enthalten je eine rote, eine grüne und eine blaue Kugel. Anna und Tom führen folgendes zweistufiges Zufallsexperminent durch. Zunächst zieht Tom zufällig eine Kugel aus der ersten Urne und legt sie in die zweite Urne. Anschließend zieht Anna aus der gut gemischten zweiten Urne eine Kugel.

i. Beschreiben Sie das Zufallsexperminent durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und geben Sie die Interpretation von $\omega \in \Omega$ an.

ii. Anna sieht, dass sie eine grüne Kugel gezogen hat. Gegeben diese Information, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tom ebenfalls eine grüne Kugel zog?

16. $(1 + 3 = 4$ Punkte)

(a) Formulieren Sie das 1. Lemma von Borel-Cantelli.

(b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $]0, 1[$ uniform verteilter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ferner sei $\alpha > 1$.

Zeigen Sie: P-fast sicher gilt

$$n^\alpha X_n \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty\,.$$

17. $(1 + 3 = 4$ Punkte)

(a) Formulieren Sie den Eindeutigkeitssatz für Wahrscheinlichkeitsmaße.

(b) Es sei $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ die Einheitskreislinie. Zeigen Sie:

Jedes rotationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S^1, \mathcal{B}(S^1))$ stimmt mit der Gleichverteilung (uniformen Verteilung) auf S^1 überein.

Hinweis: Sie dürfen von geeigneten Mengensystemen ohne Beweis voraussetzen, dass sie $\mathcal{B}(S^1)$ erzeugen.

18. $(1 + 3 = 4$ Punkte)

(a) Formulieren Sie eine Version des Lemmas von Neyman-Pearson.

(b) Die Zufallsvariablen X, Y seien unabhängig voneinander und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und unbekannter Varianz σ^2. Man beobachtet die Werte von X und Y.

Konstruieren Sie einen Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ mit maxmimaler Macht zur Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 = 1$ und der Alternative $H_1 : \sigma^2 = \frac{1}{4}$. Geben Sie den Verwerfungsbereich V eines solchen Tests an.

19. $(2 + 2 = 4$ Punkte) In einer Urne liegen unbekannte Anzahlen roter, grüner und blauer Kugeln. Anna zieht viermal mit Zurücklegen zufällig eine Kugel.

(a) Beschreiben Sie das Zufallsexperminent durch ein statistisches Modell $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ und geben Sie die Interpretation von $\omega \in \Omega$ an.

(b) Anna zieht zuerst eine rote Kugel, dann eine grüne Kugel, dann eine blaue Kugel, und zuletzt nochmal eine rote Kugel. Gegeben diese Beobachtung, berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den unbekannten Anteil p_r roter Kugeln an den Kugeln in der Urne.

20. $(1 + 3 = 4$ Punkte) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

   (a) Definieren Sie, wann Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bezüglich P stochastisch unabhängig heißen, wobei $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Zeigen Sie: Wenn A, B und C bezüglich P stochastisch unabhängige Ereignisse sind, so sind auch $A \cup B$ und $C^c = \Omega \setminus C$ bezüglich P stochastisch unabhängig.

21. $(1 + 3 = 4$ Punkte)

   (a) Formulieren Sie eine Version des starken Gesetzes der großen Zahlen.

   (b) Es seien P ein Wahrscheinlichkeitsmaß und X eine auf $]0, 1[$ bezüglich P uniform verteilte Zufallsvariable. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $Z_n \in \{0, 1, \ldots 9\}$ die n-te Dezimalnachkommastelle von X. Mit dem Ereignissen $A_j = \{Z_j = 3 \text{ und } Z_{j+1} = 1\}$ bezeichne $Y_n = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$ die relative Häufigkeit von "31" in der Dezimaldarstellung von X bis zur $(n+1)$-ten Nachkommastelle. Zeigen Sie: Y_n konvergiert P-fast sicher für $n \to \infty$ gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$. Welchen Wert hat a?
   Hinweis: Beachten Sie Abhängigkeiten zwischen den A_j! Es kann sinnvoll sein, zunächst gerade und ungerade j getrennt zu betrachten.

22. $(1 + 3 = 4$ Punkte)

   (a) Die Zufallszahlen $X > 0$ und $Y > 0$ seien unabhängig voneinander und exponentialverteilt mit unbekanntem Erwartungswert $1/\lambda > 0$. Man beobachtet die Werte von X und Y. Geben Sie ein statistisches Modell $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ an, das diese Situation beschreibt.

   (b) Konstruieren Sie einen Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ mit maximaler Macht zur Nullhypothese $H_0 : 1/\lambda = 1$ und der Alternative $H_1 : 1/\lambda = 2$. Geben Sie den Verwerfungsbereich V eines solchen Tests an.

Hinweis: Das Ergebnis darf mit Hilfe der Quantilsfunktion einer geeigneten Verteilung ausgedrückt werden.

23. ($1 + 3 = 4$ Punkte)

    (a) Formulieren Sie eine Version des Zentralen Grenzwertsatzes.

    (b) Ein fairer Spielwürfel, beschriftet mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 wird n-mal geworfen; die Summe der Augenzahlen wird mit S_n bezeichnet. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P liege diesem Zufallsexperiment zugrunde. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ der Limes

    $$\lim_{n\to\infty} P\left[S_n > \tfrac{7}{2}n + n^\alpha\right]$$

    existiert, und berechnen Sie den Grenzwert in Abhängigkeit von α.
    Hinweise: Es empfiehlt sich, mehrere Fälle für α zu unterscheiden. Im Ergebnis darf die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung verwendet werden. Es gilt $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ und $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$.

24. ($2 + 2 = 4$ Punkte) In einer Urne liegen $m = r + b$ Kugeln, darunter r rote und b blaue Kugeln. Max zieht zufällig n Kugeln *ohne Zurücklegen*, wobei $n \leq m$. Für $j = 1, 2, \ldots, n$ sei $F_j = 1$, wenn die j-te gezogene Kugel rot ist, und $F_j = 0$ andernfalls. Weiter sei

    $$R = \sum_{j=1}^{n} F_j$$

    die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.

    (a) Beschreiben Sie dieses Zufallsexperiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und geben Sie die Definition von F_j als Zufallsvariable auf diesem Raum an.

    (b) Berechnen Sie die Varianz von R.
    Hinweise: Es empfiehlt sich hierzu, für $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die Kovarianz zwischen F_i und F_j zu berechnen. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $i = j$ und $i \neq j$.