Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
6. Zentralübungsblatt

Man kreuze richtig an:

1) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ die Komplementärmatrix zu A.

   Dann ist $\widetilde{a}_{23} = \ldots$

   a) 1 b) -1 c) 4 d) -4

2) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ die zu A inverse Matrix. Dann ist $b_{14} = \ldots$

   a) 0 b) $1/2$ c) $5/6$ d) 2

3) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist die skalare Multiplikation „$\cdot$" eine Abbildung ...

   a) $V \times V \to \mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$ c) $\mathbb{R} \times V \to V$ d) $V \times V \to V$

4) Ist $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sind $u, v \in V$, so sind die folgenden Ausdrücke sinnvoll (d.h. sie sind definiert):

   a) $u - v$ b) $u \cdot v$ c) $\dfrac{u}{v}$ d) $\dfrac{u}{v}$, falls $v \neq 0$ e) $1 + v$ f) $v \cdot 2$

5) Es seien $p(x), q(x) \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ zwei Polynome vom Grad 3. Dann hat das Polynom $p(x) + q(x)$ den Grad ...

   a) $= 6$ b) $= 3$ c) ≤ 3 d) > 3

Aufgaben Es sei $n \ge 2$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix.

1) Man zeige: Ist A nicht invertierbar, so ist $A \cdot \widetilde{A} = 0$.

2) Man folgere: Ist A nicht invertierbar, so ist auch $\widetilde{A}$ nicht invertierbar.

   (Tip: Widerspruchsbeweis!)

3) Man folgere: Ist $\det A = 0$, so ist auch $\det \widetilde{A} = 0$.

4) Man folgere: Die Beziehung
$$\det(\widetilde{A}) = (\det A)^{n-1}$$
   (die auf dem 6. Tutoriumsblatt, Aufgabe T-4 a), für invertierbares A bewiesen wird) gilt auch, wenn A *nicht* invertierbar ist.

Lösungen

1) Da A nicht invertierbar ist, ist $\det A = 0$; aber damit ist $A \cdot \widetilde{A} = \det(A) \cdot E_n = 0 \cdot E_n = 0$.

2) Angenommen, A sei nicht invertierbar, $\widetilde{A}$ dagegen schon. Dann gilt nach 1) die Beziehung $A \cdot \widetilde{A} = 0$; durch Multiplikation mit $\widetilde{A}^{-1}$ folgt $A = 0$. Dann ist aber auch $\widetilde{A} = 0$, im Widerspruch zur Invertierbarkeit von $\widetilde{A}$.

3) Da „nicht invertierbar" gleichbedeutend ist mit „Determinante ist 0", ist 3) nur eine Umformulierung von 2).

4) Ist A nicht invertierbar, so gilt nach dem soeben Bewiesenen $\det A = 0 = \det \widetilde{A}$. Die Gleichung $\det(\widetilde{A}) = (\det A)^{n-1}$ ist also deshalb erfüllt, weil beide Seiten den Wert 0 haben.