Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I
# 5. Zentralübungsblatt

**Man kreuze richtig an:**

1) Es seien $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det C = \det D$. Dann gilt:

   a) $C$ ist invertierbar $\quad\wedge\quad$ $D$ ist invertierbar
   b) $C$ ist invertierbar $\quad\Longleftrightarrow\quad$ $D$ ist invertierbar
   c) $C = D$
   d) $D$ entsteht aus $C$ durch elementare Zeilenumformungen

2) Es sei $n \geq 1$. Die Menge $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$ ist ...

   a) eine Teilmenge von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
   b) eine Gruppe bezüglich „ $\cdot$ “
   c) eine abelsche Gruppe bezüglich „ $\cdot$ “
   d) eine abelsche Gruppe bezüglich „ $+$ “

3) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det A = 1$. Dann ...

   a) ist $A$ invertierbar.
   b) ist auch $\det A^{\mathsf{T}} = 1$.
   c) ist $\det(A^r) = 1$ für alle $r \in \mathbb{N}$.
   d) gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $A^r = E_n$

4) *Lesen von formalen Definitionen*:

Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Dann ist ...

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1 in der oberen Nebendiagonalen, sonst 0)

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 in der unteren Nebendiagonalen, sonst 0)

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 in beiden Nebendiagonalen, sonst 0)

d) $A = E_n$

5) Für $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt für die Komplementärmatrix $\widetilde{A}$:

a) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$

d) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\widetilde{A}$ kann nicht gebildet werden, da $A$ nicht invertierbar ist.

**Aufgabe** Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine obere Dreiecksmatrix.

1) Man berechne $\widetilde{A}$.

2) Man berechne von Hand $\widetilde{A} \cdot A$.

3) Was fällt an der Form von $\widetilde{A}$ auf?

   Man formuliere eine Vermutung für Matrizen anderer Größen als $3 \times 3$.

**Lösung**

1) Es ergibt sich

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} df & -bf & ce - cd \\ 0 & af & -ae \\ 0 & 0 & ad \end{pmatrix}$$

2) Man erhält

$$\widetilde{A} \cdot A = \begin{pmatrix} dfa & 0 & 0 \\ 0 & dfa & 0 \\ 0 & 0 & dfa \end{pmatrix} = \det(A) \cdot E_3,$$

wie die Theorie aus der Vorlesung es vorhersagt.

3) Auch $\widetilde{A}$ ist eine obere Dreiecksmatrix. Man könnte also vermuten: Ist $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist auch $\widetilde{B}$ eine obere Dreiecksmatrix.