Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1.

a) Laut Vorlesung bilden v_1, v_2, v_3 genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn die aus ihnen gebildete Matrix

$$A := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Nun ist $\det(A) = 3 \cdot (1 \cdot 0 \cdot t) - (1^3 + 0^3 + t^3) = -(1 + t^3)$ nach der Regel von Sarrus (vgl. dazu die Bemerkung im Lösungsvorschlag zu Aufgabe T-3 b) vom 4. Tutoriumsblatt), so daß die Matrix im Fall $t^3 = -1$, d.h. für $t = -1$ *nicht* invertierbar ist.

Also ist $M = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Eine trickreiche, aber vielleicht insgesamt die einfachste Art der Berechnung der Koordinaten läuft folgendermaßen: Daß ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bezüglich v_1, v_2, v_3 hat, bedeutet genau, daß

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = v$$

ist. Wenn wir diese Beziehung für die uns interessierenden Fälle $v = e_1$, $v = e_2$ und $v = e_3$ nebeneinanderschreiben, ergibt sich daraus, daß die gesuchten Koordinaten eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bilden mit

$$A \cdot D = E_3.$$

Es ist also einfach $D = A^{-1}$, und diese Inverse läßt sich vielleicht am Bequemsten mittels der komplementären Matrix berechnen: Es ist

$$D = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{-1}{1+t^3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & t & -t^2 \\ t & -t^2 & -1 \\ -t^2 & -1 & t \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t & t^2 \\ -t & t^2 & 1 \\ t^2 & 1 & -t \end{pmatrix}.$$

Liest man nun die Spalten von D, ergibt sich: Für $t \neq 1$ sind …

(i) die Koordinaten von e_1 bezüglich v_1, v_2, v_3 die Zahlen $1/(1+t^3)$, $-t/(1+t^3)$, $t^2/(1+t^3)$,

(ii) die Koordinaten von e_2 bezüglich v_1, v_2, v_3 die Zahlen $-t/(1+t^3)$, $t^2/(1+t^3)$, $1/(1+t^3)$,

(iii) die Koordinaten von e_3 bezüglich v_1, v_2, v_3 die Zahlen $t^2/(1+t^3)$, $1/(1+t^3)$, $-t/(1+t^3)$,

und entsprechend ist

(i) die Zerlegung von e_1 in Komponenten bzgl. v_1, v_2, v_3 gegeben durch

$$e_1 = \frac{1}{1+t^3} v_1 + \frac{-t}{1+t^3} v_2 + \frac{t^2}{1+t^3} v_3 = \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} 0 \\ -t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(ii) die Zerlegung von e_2 in Komponenten bzgl. v_1, v_2, v_3 gegeben durch

$$e_1 = \frac{-t}{1+t^3} v_1 + \frac{t^2}{1+t^3} v_2 + \frac{1}{1+t^3} v_3 = \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -t^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(iii) die Zerlegung von e_3 in Komponenten bzgl. v_1, v_2, v_3 gegeben durch

$$e_1 = \frac{t^2}{1+t^3} v_1 + \frac{1}{1+t^3} v_2 + \frac{-t}{1+t^3} v_3 = \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ t^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} -t^2 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Ein Vektor $v = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ liegt genau dann in $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, wenn das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem lösbar ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & b_1 \\ 0 & t & 1 & b_2 \\ t & 1 & 0 & b_3 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & b_1 \\ 0 & t & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & -t^2 & b_3 - tb_1 \end{array}\right)$$
$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & b_1 \\ 0 & 1 & -t^2 & b_3 - tb_1 \\ 0 & 0 & 1+t^3 & t^2 b_1 + b_2 - tb_3 \end{array}\right).$$

Hieran erkennen wir aufs neue, daß im Fall $1 + t^3 \neq 0$, also $t \neq -1$, dieses Gleichungssystem *stets* lösbar ist, also $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ ist. Dies liefert einen neuen Beweis dafür, daß in diesem Fall v_1, v_2, v_3 ein Erzeugendensystem und damit sogar eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Im nun interessierenden Fall $t = -1$ ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $0 = t^2 b_1 + b_2 - tb_3 = b_1 + b_2 + b_3$ ist. Damit ist in diesem Fall

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \left\{ x = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3 \mid b_1 + b_2 + b_3 = 0 \right\}.$$

Um alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 zu bestimmen, setzen wir in die obige Matrixumformung $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ein, woraus sich die Zeilenstufenform (beachte $t = -1$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ergibt. Daraus ergibt sich sofort die allgemeine Lösung $x_1 = x_2 = x_3$, so daß die allgemeine Darstellung des Nullvektors als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 im Fall $t = -1$ die Form

$$0 = \lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 \quad \text{mit beliebigem } \lambda \in \mathbb{R}$$

hat.

Aufgabe Ü-2. Bevor wir uns dieser Aufgabe zuwenden, lohnt es sich, die folgende handliche Merkregel für Darstellbarkeit eines Vektors durch gegebene andere zu formulieren:

Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in einem Vektorraum. Der Vektor v_i läßt sich genau dann als Linearkombination der übrigen Vektoren schreiben, wenn es eine lineare Abhängigkeitsbeziehung

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

mit $\lambda_i \neq 0$ gibt.

Denn gibt es so eine Beziehung, so kann man sie nach v_i auflösen, womit die Darstellbarkeit bewiesen ist. Umgekehrt kann man, ausgehend von einer Darstellung $v_i = a_1v_1 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \ldots + v_n$, durch Umstellen eine lineare Abhängigkeitsbeziehung

$$a_1v_1 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1} + (-1) \cdot v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \ldots a_nv_n = 0$$

erhalten, in der v_i mit einem Koeffizienten $\neq 0$ auftaucht.
Dieses Kriterium werden wir in dieser und der nächsten Aufgabe verwenden.

a) Ich suche nach Möglichkeiten, den Nullvektor als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 zu schreiben, und löse dazu das homogene lineare Gleichungssystem mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

An dieser Darstellung in Zeilenstufenform erkennt man, daß die Lösung einen freien Parameter (nämlich x_3) enthält. Damit ist der Nullvektor nicht die einzige Lösung, d.h. die drei Vektoren sind linear abhängig.

Man kann aber noch mehr erkennen: Die allgemeine Lösung lautet nämlich

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{7}\lambda \\ \frac{3}{7}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit einem } \lambda \in \mathbb{R},$$

so daß für den Lösungsraum gilt

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Das bedeutet, daß sogar in allen linearen Abhängigkeitsbeziehungen $0 = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3$ *alle* Faktoren λ_i von Null verschieden sind. Nach unserer vorangestellten Merkregel bedeutet das, daß *jeder* der Vektoren v_i sich durch die anderen beiden darstellen läßt.

b) Da wir gesehen haben, daß jeder der Vektoren v_i durch die beiden anderen darstellbar ist, können wir beliebige zwei dieser Vektoren nehmen, um immer noch ein Erzeugendensystem von V zu erhalten; da beispielsweise v_1, v_2 aber offensichtlich linear unabhängig sind (keiner ist Vielfaches des anderen), können wir diese beiden Vektoren als Basis von V verwenden. (Mit der gleichen Begründung hätten wir auch v_1, v_3 oder v_2, v_3 wählen können.)

Um die Vektoren zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ zu ergänzen, verwende ich wieder das Prinzip „Probieren auf gut Glück": Wenn man zwei völlig beliebige weitere Vektoren wählt, wird man „meistens" eine Basis erhalten. Ob man Glück hatte, kann man beispielsweise durch Berechnung der Determinante überprüfen; beispielsweise für die Ergänzung v_1, v_2, e_1, e_2 zeigt die Rechnung

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & e_1 & e_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ldots = 14 \neq 0,$$

daß tatsächlich v_1, v_2, e_1, e_2 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe Ü-3. Dies ist im Wesentlichen die gleiche Aufgabe wie in Ü-2:

a) Wir könnten hier mit der Determinante argumentieren, aber in Hinblick auf b) betrachten wir stattdessen, analog zum Vorgehen in Ü-3, das Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & -15 & 3 & -6 \\ 0 & -15 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

An dieser Zeilenstufenform erkennt man, daß es Darstellungen $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_4 v_4 = 0$ gibt, in denen nicht alle $\lambda_i = 0$ sind (denn λ_4 ist ein freier Parameter). Also sind die Vektoren linear abhängig.

b) Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems aus a) ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5}\lambda \\ -\frac{2}{5}\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

also ist der Lösungsraum

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Das bedeutet: Die allgemeinste Darstellung des Nullvektors als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_4$ hat die Gestalt

$$0 = 3\lambda v_1 - 2\lambda v_2 + 5\lambda v_4 \quad \text{mit einem beliebigen } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nach unserer Merkregel aus Aufgabe Ü-2 ergibt sich daraus, daß man die Vektoren v_1, v_2, v_4 jeweils als Linearkombination der übrigen drei darstellen kann, nicht jedoch den Vektor v_3 („auf ihn kann man nicht verzichten“).

Damit sind auch v_2, v_3, v_4 sowie v_1, v_3, v_4 sowie v_1, v_2, v_3 Erzeugendensysteme von V. Diese sind jedoch auch Basen, denn es gibt keine lineare Abhängigskeitsgleichung für die Vektoren v_2, v_3, v_4 bzw. v_1, v_3, v_4 bzw. v_1, v_2, v_3 – denn eine solche wäre auch eine Abhängigkeitsgleichung für die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, und wie solche aussehen, haben wir bereits gesehen (es tauchen bis auf v_3 immer *alle* anderen drei Vektoren darin auf).

c) Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^4$ ist genau dann eine mögliche Ergänzung zu einer der gewonnenen Basen, wenn $w \notin V$ liegt. Wir müssen also nur herausfinden, wie ein solcher Vektor aussehen muß; dazu ist es am einfachsten, eine implizite Darstellung von V zu berechnen: Wie üblich, untersuchen wir dazu die Lösbarkeit des folgenden inhomogenen Gleichungssystems (welches Erzeugendensystem von V man für die linke Hälfte der Koeffizientenmatrix nimmt, ist egal – entweder $v_1, \ldots, v_4$, oder eine der in b) gewonnenen Basen, oder ein beliebiges anderes):

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \big| & b \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 5 & -2 & b_2 \\ 2 & -7 & 3 & b_3 \\ 4 & 1 & 1 & b_4 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 5 & -2 & b_2 \\ 0 & -15 & 3 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & -15 & 1 & b_4 - 4b_1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 15 & -6 & 3b_2 \\ 0 & -15 & 3 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -2 & b_4 - 2b_1 - b_3 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 15 & -6 & 3b_2 \\ 0 & 0 & -3 & b_3 - 2b_1 + 3b_2 \\ 0 & 0 & -2 & b_4 - 2b_1 - b_3 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 15 & -6 & 3b_2 \\ 0 & 0 & -6 & 2b_3 - 4b_1 + 6b_2 \\ 0 & 0 & 6 & -3b_4 + 6b_1 + 3b_3 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 15 & -6 & 3b_2 \\ 0 & 0 & -6 & 2b_3 - 4b_1 + 6b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3b_4 + 2b_1 + 5b_3 + 6b_2 \end{array}\right).$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $-3b_4 + 2b_1 + 5b_3 + 6b_2$ ist, so daß sich

$$V = \left\{ b \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, 2b_1 + 6b_2 + 5b_3 - 3b_4 = 0 \right\}$$

ergibt. Wir können also jede der in b) gewonnenen Basen um einen beliebigen Vektor $w \in \mathbb{R}^4$ mit $2w_1 + 6w_2 + 5w_3 - 3w_4 \neq 0$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen.

Hier kann man einmal sehen, warum das so oft vorgeschlagene Verfahren zur Ergänzung einer Basis „nimm aufs Geratewohl irgendeinen Vektor“ funktioniert: Wenn man einen „zufälligen“ Vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4$ nimmt, muß man schon gehöriges Pech haben, damit ausgerechnet $2b_1 + 6b_2 + 5b_3 - 3b_4 = 0$ ist…

Aufgabe Ü-4.

a) Hier kann man vorteilhaft rechnen, indem man (auch wenn die b_i ja nicht unbedingt für Spaltenvektoren in einem $\mathbb{R}^n$ zu stehen brauchen) trotzdem „symbolisch“ eine Matrix bildet, in der die Namen b_1, b_2, b_3 und analog auch $v_1, \ldots, v_4$ vorkommen: Dann gilt nämlich

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Was nützt das? Die lineare Abhängigkeit von $v_1, \ldots, v_4$ ist dann gezeigt, wenn wir Zahlen $a_1, \ldots, a_4$ finden, die nicht alle null sind, mit $a_1 v_1 + \ldots + a_4 v_4 = 0_V$. Aber dies kann man schreiben als

$$\begin{aligned} 0_V &\overset{!}{=} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Und was nützt das jetzt? Der Punkt ist die Assoziativität der Matrixmultiplikation (die nämich auch gilt, wenn man mit Matrizen rechnet, die symbolische Einträge wie b_i oder v_i enthalten): Diese zeigt, daß es hinreichend ist (nicht unbedingt notwendig!), die Zahlen $a_1, \ldots, a_4$ so zu wählen, daß

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist. Und dies ist eine gewöhnliche Frage an Matrizen bzw. eine Frage in $\mathbb{R}^3$: Sind die vier Spalten der angegebenen 3×4-Matrix linear abhängig in $\mathbb{R}^3$? Die Antwort lautet: Ja, selbstverständlich, denn $\mathbb{R}^3$ ist dreidimensional, so daß vier Vektoren *immer* linear abhängig sind. Also gibt es $a_1, \ldots, a_4$, die das Gewünschte leisten. (Wem das zu abstrakt ist, der oder die kann mit dem üblichen Rechenverfahren solche Zahlen a_i bestimmen und nachrechnen, daß dann tatsächlich $a_1 v_1 + \ldots + a_4 v_4 = 0$ ist.)

Kurz gesagt: Die vier Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ sind bereits deshalb linear abhängig, weil sie jeweils Linearkombinationen von nur insgesamt *drei* Vektoren b_1, b_2, b_3 sind!

b) Hier kann man nun mit Koordinaten rechnen: Es sei $p : V \to \mathbb{R}^3$ die Koordinatenabbildung bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3. Es genügt laut Vorlesung, wenn wir nachweisen, daß die drei Bilder $p(v_1), p(v_2), p(v_3)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ sind. Die aus diesen drei Bildern gebildete Matrix ist jedoch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

und diese ist invertierbar, beispielsweise weil ihre Determinante den Wert $-3 \neq 0$ hat.