Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I
# 9. Übungsblatt

**Aufgabe Ü-1.** Im $\mathbb{R}^3$ sind $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\t\\1\end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Man gebe die Menge $M$ aller $t$ an, für die $v_1, v_2, v_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Man bestimme für $t \in M$ die Koordinaten sowie die Komponenten der Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3$ bezüglich der Basis $v_1, v_2, v_3$.

c) Man bestimme für $t \notin M$ den Untervektorraum $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$ (d.h. man bestimme eine implizite Darstellung dieses Untervektorraums) und gebe alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination von $v_1, v_2, v_3$ an.

**Aufgabe Ü-2.** Im $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix}6\\0\\5\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}4\\-7\\1\\3\end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$ gegeben.

a) Man zeige, daß $v_1, v_2, v_3$ linear abhängig sind, und entscheide, ob *jeder* dieser drei Vektoren eine Linearkombination der beiden anderen ist.

b) Man bestimme eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und ergänze diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

**Aufgabe Ü-3.** Im $\mathbb{R}^4$ sind $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\-7\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\\1\end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\\-2\end{pmatrix}$ gegeben.

a) Man zeige, daß $v_1, v_2, v_3, v_4$ linear abhängig sind.

b) Welche Möglichkeiten gibt es, aus den Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4$ eine Basis von $V := \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ auszuwählen?

c) Welche Möglichkeiten gibt es, die in b) ermittelten Basen von $V$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ zu ergänzen?

**Aufgabe Ü-4 (Staatsexamen Frühjahr 2000).** Es seien $b_1, b_2, b_3$ Vektoren in einem reellen Vektorraum $V$. Man zeige:

a) Die Vektoren $v_1 = b_1 + b_2 + b_3$, $v_2 = b_1 + 2b_2 + 3b_3$, $v_3 = 2b_1 + 3b_2 + b_3$ und $v_4 = 3b_1 + b_2 + 2b_3$ sind linear abhängig.

b) Ist $b_1, b_2, b_3$ eine Basis von $V$, so sind die Vektoren $v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig.

Die Lösungen sind spätestens am **Montag, 19. Januar 2015, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!