Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
2. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1 (Staatsexamen Frühjahr 2008).

a) Man löse das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^4$?

Aufgabe Ü-2.

a) Man berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

alle Produkte aus je zwei Faktoren, sofern sie definiert sind.

b) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ berechne man die Matrix $A^3 - 5A^2 + 4A + E$.

(Hier wird E für E_3 geschrieben; das ist oft üblich, wenn das Format der Matrix aus dem Kontext klar ist.)

Aufgabe Ü-3. Es seien $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$ Vektoren.

a) Man überzeuge sich davon, daß gilt:

- Das Produkt $x \cdot y^\mathsf{T}$ ist stets definiert und ergibt eine $m \times n$-Matrix.
- Das Produkt $x^\mathsf{T} \cdot y$ ist nur definiert, wenn $n = m$ ist, und ergibt dann eine Zahl.

(Unter einer „Zahl“ verstehen wir hier ein Element von $\mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$.)

b) Man zeige: Ist $n = m$ und $M := x \cdot y^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist M^2 ein Vielfaches von M.
Was muß für x, y gelten, damit $M^2 = 0$ ist?

c) Man finde eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, in der kein Eintrag 0 ist, und für die $M^2 = 0$ gilt.

Aufgabe Ü-4. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Man sagt, A habe „Zeilenrang ≤ 1“, wenn A eine Zeile besitzt, von der jede andere Zeile ein Vielfaches ist.[1]

Ein Beispiel zum Verständnis: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Zeilenrang ≤ 1, denn jede ihrer Zeilen ist Vielfaches der zweiten Zeile. (Übrigens ist eigentlich auch jede Zeile Vielfaches der ersten und ebenso der vierten Zeile!)

Man zeige:

a) Gibt es Vektoren $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$ mit $A = x \cdot y^\mathsf{T}$, so hat A Zeilenrang ≤ 1.

b) Hat A Zeilenrang ≤ 1, so gibt es Vektoren $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$ mit $A = x \cdot y^\mathsf{T}$.

c) Hat A Zeilenrang ≤ 1, so auch A^T.

d) Ist A quadratisch (d.h. $n = m$), und hat A Zeilenrang ≤ 1, so ist A^2 ein Vielfaches von A.

Die Lösungen sind spätestens am **Mittwoch, 5. November 2014, 18 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!

---

[1] Man beachte, daß wir nicht definieren, was ein „Zeilenrang“ sein soll, sondern nur, was es heißen soll, daß eine Matrix „Zeilenrang ≤ 1“ hat. – Wir werden später in der Vorlesung (Kapitel 6) sehen, was man allgemein unter dem „Zeilenrang“ einer Matrix versteht, was er mit der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zu tun hat und daß er sich beim Transponieren einer Matrix nicht ändert.