Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1. Wir formen die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems nach dem Gaußschen Verfahren mittels Zeilenumformungen um:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$
$$\overset{\text{III}-2\cdot\text{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$
$$\overset{\text{III}+\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$
$$\overset{\text{III}\leftrightarrow\text{IV}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Diese Matrix hat Zeilenstufenform, und zwar ist jede Spalte eine Stufenspalte (egal, welche Werte α und β haben). Also besitzt das Gleichungssystem stets eine eindeutig bestimmte Lösung, die man von unten nach oben ablesen kann:

$$\begin{aligned} x_4 &= 0, \\ x_3 &= \beta - \alpha \cdot x_4 = \beta, \\ x_2 &= -x_4 - 2x_3 = -2\beta, \\ x_1 &= -x_3 - x_2 = \beta, \end{aligned}$$

also ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ -2\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe Ü-2. Wir verfahren genau wie in Aufgabe 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 1 & s & 1 & -1 \\ s & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ 0 & 1-s & 1-s^2 & -1-2s \end{array}\right)$$
$$\overset{\text{III}+\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ 0 & 0 & 2-s-s^2 & -4-2s \end{array}\right)$$

Es sieht so aus, als wären wir nun bei Zeilenstufenform angekommen – allerdings kann es hier noch kleinere Unglücke geben, wenn die Einträge auf Stufenspalten, die von s abhängen, zufällig verschwinden sollten.
Um herauszufinden, wann $2 - s - s^2$ verschwindet, und man keine Lust auf quadratische Gleichungen hat, lohnt es sich, noch einmal an das Entstehen dieses Ausdrucks zurückzudenken: Dann ist

$$2 - s - s^2 = 1 - s^2 + (1 - s) = (1 + s)(1 - s) + (1 - s) = (2 + s)(1 - s),$$

so daß der Ausdruck $2 - s - s^2$ genau für $s \in \{1, -2\}$ verschwindet. Diese Werte von s behandeln wir also später gesondert.
Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ haben wir (da der Eintrag $s - 1$ in der zweiten Zeile dann ebenfalls nicht verschwindet) eine Matrix in Zeilenstufenform, in der jede Spalte Stufenspalte ist. Also gibt es genau eine Lösung, die man wieder von unten nach oben bestimmen kann:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{-4 - 2s}{2 - s - s^2} = \frac{-2 \cdot (2 + s)}{(2 + s)(1 - s)} = \frac{2}{s - 1},\\
x_2 &= \frac{1}{s - 1} \cdot (-3 - (1 - s) \cdot x_3)) = \frac{1}{s - 1} \cdot \left(-3 - (1 - s) \cdot \frac{2}{s - 1}\right) = \frac{-1}{s - 1},\\
x_1 &= 2 - s \cdot x_3 - x_2 = 2 - \frac{2s}{s - 1} + \frac{1}{s - 1} = \frac{-1}{s - 1}.
\end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge im Fall $s \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} {}^{-1}/_{(s-1)} \\ {}^{-1}/_{(s-1)} \\ {}^{2}/_{(s-1)} \end{pmatrix} \right\}.$$

Im Fall $s = 1$ hat die erhaltene erweiterte Koeffizientenmatrix die Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Die unteren beiden Zeilen besagen nun, daß es in diesem Fall keine Lösung gibt.
Im Fall $s = -2$ schließlich erhalten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \curvearrowright \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dies ist eine Matrix in Zeilenstufenform, in der wir die Lösungen wieder von unten nach oben ablesen können. Da die dritte Spalte diesmal keine Stufenspalte ist, ist $x_3 = \lambda$ ein freier Parameter; für die übrigen Unbekannten ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
x_3 &= \lambda,\\
x_2 &= 1 + x_3 = 1 + \lambda,\\
x_1 &= 2 + 2x_3 - x_2 = 1 + \lambda,
\end{aligned}$$

also ist die Lösungsmenge im Fall $s = -2$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 1 + \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe Ü-3. Wir erweitern die Matrix A durch einen noch „unbestimmten" Vektor (mit den Einträgen y_1, y_2, y_3, y_4) zu einer erweiterten Koeffizientenmatrix und arbeiten dann mit Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & y_1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & y_2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & y_3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & y_4 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & y_1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & y_3 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & y_4 - y_2 \end{array}\right)$$
$$\curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & y_2 + y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & y_3 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 - y_3 - y_2 + y_1 \end{array}\right).$$

a) Das Gleichungssystem ist dann unlösbar, wenn der Nullzeile der zuletzt erhaltenen Koeffizientenmatrix auf der rechten Seite eine Zahl $\neq 0$ gegenübersteht, wenn also $y_4 - y_3 - y_2 + y_1 \neq 0$ ist. Dies ist beispielsweise für

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Fall.

b) Nein, ein solches b existiert nicht: Denn ein lineares Gleichungssystem, in dessen Koeffizientenmatrix nicht jede Spalte eine Stufenspalte ist, ist entweder unlösbar oder hat unendlich viele Lösungen.

c) Hierfür müssen wir nur noch in unserer schon erfolgten Rechnung die zu b_0 gehörigen Werte $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$ einsetzen, und erhalten damit die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hier erkennen wir, daß $x_4 = \lambda$ ein freier Parameter ist; von unten nach oben ergibt sich dann

$$\begin{aligned} x_4 &= \lambda, \\ x_3 &= -2x_4 = -2\lambda, \\ x_2 &= \frac{1}{2}(2 - x_3) = 1 + \lambda, \\ x_1 &= 1 - x_3 - 4x_2 = -3 - 2\lambda, \end{aligned}$$

also ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -3 - 2\lambda \\ 1 + \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$