Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1.

a) Die Frage wird leichter, wenn man erkennt, daß U der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

ist. Da offensichtlich $\operatorname{Rang}(A) = 1$ ist, folgt $\dim(U) = n - \operatorname{Rang}(A) = n - 1$.

b) Der Schnitt zweier implizit gegebener Untervektorräume ergibt sich durch Kombinieren der beiden zugehörigen Gleichungssysteme; da U' der Lösungsraum des Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

ist, ergibt sich entsprechend, daß $U \cap U'$ der Lösungsraum des Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times n}$$

ist. Um ihren Rang zu bestimmen, bringen wir sie auf Zeilenstufenform und erhalten die Matrix

$$C \overset{\mathrm{II} - a_1\cdot \mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \end{pmatrix}.$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

- Sind alle a_i identisch, also $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, so gilt $\operatorname{Rang} C = 1$, so daß $\dim(U \cap U') = n - \operatorname{Rang}(C) = n - 1$ ist.

  (Dies ist auch nicht überraschend, denn sind alle a_i identisch, so ist offenbar $U' = U$.)
- Sind nicht alle a_i identisch, so gibt es ein i mit $a_i \neq a_1$, also $a_i - a_1 \neq 0$, und dann ist $\operatorname{Rang}(C) = 2$, also $\dim(U \cap U') = n - \operatorname{Rang}(C) = n - 2$.

Aufgabe Ü-2.

a) Die Dimensionsformel lautet $\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$ (natürlich sind auch beliebige äquivalente Umstellung dieser Gleichung möglich).

b) Im angegebenen Fall lautet die Dimensionsformel $\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 3 = 6$. Die Möglichkeiten sind nun dadurch begrenzt, daß $W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2$ als Untervektorräume von $\mathbb{R}^5$ jeweils eine Dimension zwischen 0 und 5 haben müssen; außerdem gilt $\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_1 + W_2)$, da $W_1 \cap W_2 \subset W_1 + W_2$ ist.

Allein diese rechnerischen Überlegungen reduzieren das Feld auf insgesamt drei Möglichkeiten, die alle tatsächlich auch eintreten:

- $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ (und entsprechend $\dim(W_1 + W_2) = 5$).
  Dies ist beispielsweise der Fall für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle$, denn es ist nicht schwer nachzurechnen, daß dann $W_1 \cap W_2 = \langle e_3 \rangle$ ist. (In einer Staatsexamensprüfung sollte das dann sicherheitshalber auch mit dem üblichen Rechenverfahren nachgewiesen werden.)
- $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$ (und entsprechend $\dim(W_1 + W_2) = 4$).
  Dies ist beispielsweise der Fall für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$, denn dann ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_2, e_3 \rangle$.
- $\dim(W_1 \cap W_2) = 3$ (und entsprechend $\dim(W_1 + W_2) = 3$).
  Dies ist beispielsweise der Fall für $W_1 = W_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

Aufgabe Ü-3. Bei unserem jetzigen Kenntnisstand muß man den Rang für jede der vier Matrizen aufs Neue berechnen (und auch später wird es nicht viel besser, siehe unten). Ich gebe nur die Ergebnisse an: Man erhält zunächst

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 18 & 24 & -6 \\ 35 & 47 & -11 \\ 53 & 71 & -17 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 19 & 11 & 21 \\ 8 & 19 & 11 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 19 & 11 & 21 \end{pmatrix}$$

und dann, mit einer der besprochenen Methoden zur Berechnung von Rängen, $\operatorname{Rang}(A) = 2$, $\operatorname{Rang}(B) = 2$, $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 2$ und $\operatorname{Rang}(B \cdot A) = 1$. (Letzteres kann man natürlich ohne Rechnung sofort sehen.)

Im Allgemeinen läßt sich der Rang von $A \cdot B$ nicht allein aus den Rängen von A und B berechnen. Es gibt jedoch die Abschätzung $\operatorname{Rang}(A \cdot B) \leq \min(\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(B))$, die sich zusammenfassen läßt in der Merkregel: „Durch Multiplizieren von Matrizen werden Ränge niemals größer“. Dies kann man mit den folgenden Überlegungen einsehen:

- Die Spalten einer Produktmatrix $A \cdot B$ sind jeweils Linearkombinationen der Spalten der Matrix A. (Man mache sich das klar!) Das beweist $\operatorname{Spaltenraum}(A \cdot B) \subset \operatorname{Spaltenraum}(A)$ und damit
  $$\operatorname{Rang}(A \cdot B) = \operatorname{Spaltenrang}(A \cdot B) \leq \operatorname{Spaltenrang}(A) = \operatorname{Rang}(A).$$
- Die Zeilen einer Produktmatrix $A \cdot B$ sind jeweils Linearkombinationen der Zeilen der Matrix B. (Man mache sich das klar!) Das beweist $\operatorname{Zeilenraum}(A \cdot B) \subset \operatorname{Zeilenraum}(A)$ und damit
  $$\operatorname{Rang}(A \cdot B) = \operatorname{Zeilenrang}(A \cdot B) \leq \operatorname{Zeilenrang}(B) = \operatorname{Rang}(B).$$

Aufgabe Ü-4.

a) Da später auch nach dem Rang der Matrix gefragt wird, formen wir sie mit Zeilenumformungen um. (**Vorsicht:** Beim Vertauschen zweier Zeilen wechselt die Determinante das Vorzeichen, und beim Multiplizieren einer Zeile mit einem Faktor pflanzt sich dieser Faktor auch in die Determinante hinein fort. Beides würde uns aber hier nicht stören, weil wir nur wissen wollen, wann die Determinante null ist.)

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \curvearrowright \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & b-a & 2-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix}.$$

Die so erhaltene obere Dreiecksmatrix hat die Determinante $(1-a) \cdot (3-c)$ (da wir, wenn man genau mitgezählt hat, dreimal Zeilen vertauscht und keine Zeilen mit Faktoren multipliziert haben, ist diese Zahl das Negative der Determinante von $A_{a,b,c}$). Es ist also genau dann $\det(A_{a,b,c}) = 0$, wenn $a = 1$ oder $c = 3$ ist.

b) Soll die Matrix den Rang 3 haben, so darf sie nicht invertierbar sein, d.h. ihre Determinante muß verschwinden. Wir müssen also nur unter den in a) erhaltenen Fällen $a = 1$ bzw. $c = 3$ suchen.

- Ist $a = 1$, so kann man die in a) erhaltene Umformungsmatrix weiter umformen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix}$$

  Diese Matrix hat nun den Rang 3, wenn nicht gleichzeitig $b = 2$ und $c = 3$ ist.

- Ist $c = 3$, so kann man die in a) erhaltene Umformungsmatrix weiter umformen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & b-a & 2-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Hier gibt es nun zwei Unterfälle: Ist $a \neq 1$, so hat die Matrix den Rang 3. Ist aber $a = 1$, so muß man weitersehen. (Es ist nicht gesagt, daß die Matrix dann Rang 2 hat, weil sie dann nicht in Zeilenstufenform vorliegt!) Wir können uns diese Arbeit aber sparen, weil wir den Fall $a = 1$ schon erschöpfend behandelt haben.

Zusammenfassend ist genau dann $\operatorname{Rang}(A_{a,b,c}) = 3$, wenn

$$\begin{aligned} & (a = 1 \quad \wedge \quad b \neq 2) \\ \textit{oder} \quad & (a = 1 \quad \wedge \quad c \neq 3) \\ \textit{oder} \quad & (a \neq 1 \quad \wedge \quad c = 3) \end{aligned}$$

gilt.

Alternative Argumentation: Ein Blick auf die unteren beiden Zeilen der Matrix zeigt, daß der Rang mindestens den Rang 2 ist, und es gilt genau dann $\operatorname{Rang}(A_{a,b,c}) = 2$, wenn die beiden oberen Zeilen im von den unteren beiden Zeilen erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^{1\times 4}$ enthalten sind. Dieser besteht jedoch, wie man leicht sehen kann, aus allen Zeilen, bei denen sowohl die vorderen beiden als auch die hinteren beiden Einträge jeweils identisch sind. Also ist genau dann $\operatorname{Rang}(A_{a,b,c}) = 2$, wenn $a = 1$, $b = 2$ und $c = 3$ gilt.

In a) haben wir aber (wenn man so will) gezeigt, daß genau dann $\operatorname{Rang}(A_{a,b,c}) = 4$ gilt, wenn $a \neq 1$ und $c \neq 3$ gilt.

In allen anderen Fällen hat die Matrix Rang 3, also genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \textit{weder} \quad & (a \neq 1 \quad \wedge \quad c \neq 3) \\ \textit{noch} \quad & (a = 1 \quad \wedge \quad b = 2 \quad \wedge \quad c = 3) \end{aligned}$$

gilt.

Daß dieses Resultat identisch ist mit unserem oben gewonnenen Resultat, kann man entweder mit langer Grübelei oder formalem Umformen von Aussagen nachzuvollziehen versuchen; einfacher dürfte es jedoch sein, eine Wahrheitstafel für die drei Aussagen

$$\begin{aligned} A &: \text{„}a = 1\text{“}, \\ B &: \text{„}b = 2\text{“}, \\ C &: \text{„}c = 3\text{“} \end{aligned}$$

zu betrachten.