Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
10. Übungsblatt

Aufgabe Ü-1 (Staatsexamen Herbst 2012). Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Es bezeichne

$$U := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

a) Man bestimme $\dim(U)$.

b) Es sei $U' \subset \mathbb{R}^n$ die Lösungsmenge einer (weiteren) homogenen Gleichung $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ (die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ sind aus $\mathbb{R}$; $x_1, \ldots, x_n$ sind Unbestimmte).

Man bestimme $\dim(U \cap U')$ in Abhängigkeit der Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$.

(Bemerkung: Der Verfasser der Staatsexamensaufgabe stellt sich den $\mathbb{R}^n$ offenbar als Menge von „n-Tupeln“ vor, die also aus n Zahlen bestehen, die nebeneinander geschrieben und mit Komma getrennt werden. In unserer Vorlesung sind die Elemente des $\mathbb{R}^n$ dagegen immer als Spaltenvektoren notiert worden – übrigens auch anders als in der vorangehenden Grundlagen-Vorlesung! Als Vorbereitung auf die Eventualitäten, die im Staatsexamen eintreten können, wurde diese Aufgabe jedoch nicht an die Notation der Vorlesung angepaßt.)

Aufgabe Ü-2 (Staatsexamen Herbst 2008).

a) Es seien W_1 und W_2 Untervektorräume eines reellen Vektorraums V. Wie lautet die Dimensionsformel für Summe $W_1 + W_2$ und Durchschnitt $W_1 \cap W_2$?

b) Welche Dimension kann $W_1 \cap W_2$ haben, wenn $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$ und $V = \mathbb{R}^5$ ist? Man belege jeden möglichen Wert von $\dim(W_1 \cap W_2)$ durch ein Beispiel.

Aufgabe Ü-3. Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

gegeben. Man bestimme jeweils den Rang von A und B sowie von $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Aufgabe Ü-4 (Staatsexamen Herbst 2012). Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ sei

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so daß $\det(A_{a,b,c}) = 0$.

b) Man bestimme alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so daß $\mathrm{Rang}(A_{a,b,c}) = 3$.

Die Lösungen sind spätestens am **Montag, 26. Januar 2014, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!