

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I

## 8. Tutoriumsblatt

**Vorbereitende Aufgaben** (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

**Aufgabe V-1.** Man lese die Definition der Summe von Untervektorräumen, des Begriffs einer Linearkombination und des von Vektoren erzeugten Untervektorraumes (4.11, 4.12, 4.15, 4.16 in der Vorlesung) sorgfältig nach.

**Aufgabe V-2.** Gegeben seien die Vektoren im  $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Man rechne nach, daß  $2v_1 - v_3 - v_4 = 0$  gilt.
- Man finde durch Ausprobieren mindestens zwei weitere Linearkombinationen von  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , die den Wert 0 ergeben.

**Aufgabe V-3.** Man finde *alle* Linearkombinationen der Vektoren  $v_1, v_2, v_3, v_4$  aus Aufgabe V-2, die den Wert 0 ergeben, indem man

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \stackrel{!}{=} 0$$

als lineares Gleichungssystem für  $x := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$  auffaßt.

**Aufgabe V-4.** Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 10 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 4} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

gegeben.

- Man berechne die Lösungsmenge  $L \subset \mathbb{R}^4$  des inhomogenen linearen Gleichungssystems  $A \cdot x = b$ .
- Man berechne die Lösungsmenge  $L_0 \subset \mathbb{R}^4$  des homogenen linearen Gleichungssystems  $A \cdot x = 0$ .
- Man wähle einen beliebigen Vektor  $x_p \in L$  und rechne nach, daß gilt:
  - Für jedes  $x \in L$  liegt  $x_0 := x - x_p$  in  $L_0$ .
  - Für jedes  $x_0 \in L_0$  liegt  $x := x_0 + x_p$  in  $L$ .

(Zusammen zeigt dies, daß  $L = x_p + L_0$  ist, vgl. Bemerkung 4.14 in der Vorlesung.)

# Tutoriumsaufgaben

**Aufgabe T-1.** Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  seien die Teilmengen  $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_3 = u_1 - u_2\}$  und  $W = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 = w_3\}$  gegeben.

- Man zeige, daß  $U$  und  $W$  Untervektorräume von  $\mathbb{R}^3$  sind.
- Man zeige, daß die drei Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3$  in  $U + W$  liegen.
- Man bestimme einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^3$  mit  $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$ .

**Aufgabe T-2.** Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man untersuche, ob die Vektoren  $v$  und  $w$  sich als Linearkombinationen von  $v_1, v_2, v_3$  schreiben lassen, und ermittle jeweils gegebenenfalls eine solche Darstellung.

**Aufgabe T-3.** Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Man bestimme alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^4$ , die sich als Linearkombination von  $v_1, v_2, v_3$  darstellen lassen.
- Für die Vektoren  $u$  und  $w$  ermittle man eine Darstellung als Linearkombination von  $v_1, v_2, v_3$ , sofern eine solche existiert.

**Aufgabe T-4.** Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man zeige, daß  $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$  ist, und zwar

- durch direkten Nachweis von  $w_1, w_2 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  und  $v_1, v_2, v_3 \in \langle w_1, w_2 \rangle$ ,
- durch Ermittlung jeweils einer Gleichung, die alle Elemente von  $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  bzw. von  $\langle w_1, w_2 \rangle$  beschreibt, und den Vergleich dieser Gleichungen.