Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 7. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1.

a) Man hat die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
A \cdot X = X \cdot A \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad x_1 + x_3 = x_1 + x_2 \\
&\qquad \wedge \ x_2 + x_4 = x_1 + x_2 \\
&\qquad \wedge \ x_1 + x_3 = x_3 + x_4 \\
&\qquad \wedge \ x_2 + x_4 = x_3 + x_4 \\
&\iff \quad -x_2 + x_3 = 0 \\
&\qquad \wedge \ -x_1 + x_4 = 0 \\
&\qquad \wedge \ x_1 - x_4 = 0 \\
&\qquad \wedge \ x_2 - x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Damit haben wir für x_1, x_2, x_3, x_4 das homogene lineare Gleichungssystem mit der folgenden Matrix gefunden:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \curvearrowright \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also können $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$ beliebig sein, und dann ist $x_1 = x_4 = \mu$ und $x_2 = x_3 = \lambda$, so daß

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

ist.

b) In a) haben wir im Wesentlichen gezeigt, daß

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

ist, so daß nun noch die Beziehung

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \{\alpha \cdot A + \beta \cdot E_2 \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

zu beweisen ist. Dafür beweisen wir beide Inklusionen einzeln, wie im ersten Semester gelernt:

„$\subset$". Es gilt

$$\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = \lambda \cdot A + (\mu - \lambda) \cdot E_2,$$

also liegt jedes Element der linken Menge in der rechten Menge (nämlich mittels $\alpha := \lambda$ und $\beta := \mu - \lambda$).

„$\supset$". Es gilt

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot E_2 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

und eine Matrix dieser Form liegt in der linken Menge (nämlich mittels $\lambda := \alpha$ und $\mu := \alpha + \beta$).

Aufgabe T-2. Wir verwenden das Untervektorraumkriterium (Satz 4.8) aus der Vorlesung:

a) Dies ist ein Untervektorraum. Es ist $U_1 \neq \emptyset$ wegen $0 \in U_1$ (hier meint 0 den Nullvektor). Sind $x, y \in U_1$, so gilt $x + y \in U_1$ wegen

$$(x+y)_1 - (x+y)_2 + (x+y)_3 = x_1 + y_1 - x_2 - y_2 + x_3 + y_3 = \underbrace{x_1 - x_2 + x_3}_{=0} + \underbrace{y_1 - y_2 + y_3}_{=0} = 0,$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt außerdem

$$(\lambda x)_1 - (\lambda x)_2 + (\lambda x)_3 = \lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda \cdot (\underbrace{x_1 - x_2 + x_3}_{=0}) = 0.$$

b) Dies ist *kein* Untervektorraum: Denn beispielsweise ist der Nullvektor nicht in U_2 enthalten (im Widerspruch zu Folgerung 4.9 in der Vorlesung).

c) Dies ist ein Untervektorraum; der Beweis funktioniert genauso wie der in a).

d) Dies ist *kein* Untervektorraum. Ein Teil des Untervektorraumkriteriums, der nicht erfüllt ist (und zwar der einzige!), ist die Abgeschlossenheit unter Summenbildung: Beispielsweise sind die Vektoren $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ und $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ in U_2 enthalten (denn es ist $1^2 = 1 \cdot 1 = (-1)^2$), ihre Summe $x + y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ jedoch nicht wegen $2 \cdot 2 = 4 \neq 0^2$.

Aufgabe T-3.

a) Es ist

$$\begin{aligned} & (-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v && \text{(Distributivgesetz 4.1 b) i) \dots)} \\ =\; & ((-\lambda) + \lambda)) \cdot v && \text{(gewöhnliches Rechnen in } \mathbb{R} \dots) \\ =\; & 0_{\mathbb{R}} \cdot v && \text{(Rechenregel 4.3 a) \dots)} \\ =\; & 0_V \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v && \text{(Distributivgesetz 4.1 b) ii) \dots)} \\ =\; & \lambda \cdot ((-v) + v) && \text{(Definition von } -v \dots) \\ =\; & \lambda \cdot 0_V && \text{(Rechenregel 4.3 b) \dots)} \\ =\; & 0_V. \end{aligned}$$

b) Die Beziehung $(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = 0_V$ bedeutet genau, daß $(-\lambda) \cdot v$ das (eindeutig bestimmte) additive Inverse zu $\lambda \cdot v$ ist, welches als $-(\lambda \cdot v)$ bezeichnet wird.

Ebenso heißt die Beziehung $\lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v = 0_V$ ebenfalls, daß $\lambda \cdot (-v)$ eine weitere Verkleidung dieses (eindeutig bestimmten) additiven Inversen von $\lambda \cdot v$ ist, das, wie gesagt, als $-(\lambda \cdot v)$ bezeichnet wird.

Aufgabe T-4.

a) Angenommen, $u + w$ läge in U. Dann liegt, da auch u in U liegt, auch die Differenz $(u + w) - u$ in U, aber diese ist genau w, im Widerspruch zur Voraussetzung $w \notin U$.

Angenommen, $u + w$ läge in W. Dann liegt, da auch w in W liegt, auch die Differenz $(u + w) - w$ in W, aber diese ist genau u, im Widerspruch zur Voraussetzung $u \notin W$.

b) Es sei weder $U \subset W$ noch $W \subset U$. Angenommen, es wäre $U \cup W$ ein Untervektorraum. Die Voraussetzung bedeutet genau, daß es ein $u \in U$ mit $u \notin W$ gibt (das heißt genau $U \not\subset W$) sowie ein $w \in W$ mit $w \notin U$ (das heißt genau $W \not\subset U$). Also liegen u und w beide in $U \cup W$. Da dies (nach Widerspruchsannahme) ein Untervektorraum ist, gilt dann auch $u + w \in U \cup W$, so daß $u + w \in U$ oder $u + w \in W$ gelten muß. Aber beides ist nach a) ausgeschlossen – Widerspruch!

c) „$\Longrightarrow$“. Dies ist genau die Kontraposition der schon bewiesenen Aussage aus b). (Dies ist also ein Beweis durch Kontraposition.)

„$\Longleftarrow$“. Hier funktioniert ein direkter Beweis: Ist $W \subset U$, so ist $W \cup U = U$, und dies ist nach Voraussetzung ein Untervektorraum. Ist $U \subset W$, so ist $U \cup W = W$ ebenfalls ein Untervektorraum.