Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
5. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1. Über eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei bekannt, daß

$$A \overset{\mathrm{II}-2\,\mathrm{I}}{\curvearrowright} B \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\curvearrowright} E \tag{1}$$

gilt.

a) Man schreibe die Aussage (1) als Gleichung, in der die Matrizen A, E und Elementarmatrizen vorkommen.

b) Man ermittele eine Darstellung von A als Produkt von Elementarmatrizen.

c) Man bestimme die Matrix A.

Aufgabe V-2. Man lese die hinzugekommenen Rechenregeln für Determinanten (3.7 und 3.8 in der Vorlesung) sorgfältig nach.

Aufgabe V-3. Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

berechne man die Potenzen A^2, A^4, A^8 und A^{16} mit möglichst wenig Aufwand.

Aufgabe V-4. Man wiederhole das in der Vorlesung Grundlagen I behandelte Rechnen mit b-adischen Darstellungen von Zahlen und berechne die Darstellung von $a = 2000$ als Dualzahl (d.h. die 2-adische Darstellung).

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

a) Man berechne die Determinante $\det(A)$ von A.

b) Gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $B^{2014} = A$?

Aufgabe T-2 (Staatsexamen Herbst 1997). Man überprüfe jeweils in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Matrizen

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ t & t & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_t = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ t^2 & t & 1 & t^3 \\ t & 1 & t^3 & t^2 \\ 1 & t^3 & t^2 & t \end{pmatrix}$$

auf Invertierbarkeit und bestimme in diesen Fällen $\det(A_t^{-1})$ und bzw. $\det(B_t^{-1})$.

Aufgabe T-3 (Staatsexamen Herbst 2007). Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bezeichnet $D = \det A$ ihre Determinante und $S := a + d$ ihre sogenannte „Spur“.

a) Man zeige, daß $D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 = 0$ ist.

b) Man folgere aus a): Es gilt genau dann $A^2 = E_2$, wenn

$$(S = 0 \ \wedge \ D = -1) \quad \vee \quad (b = c = 0 \ \wedge \ a^2 = d^2 = 1)$$

gilt.

Aufgabe T-4 (Potenzieren von Matrizen). Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Wir wollen für einen großen Koeffizienten $k \in \mathbb{N}$ die Potenz A^k effizient berechnen.

a) Es sei $P_0 := A$ und $P_{i+1} := (P_i)^2$ für jedes $i \geq 0$.
Man zeige, daß dann $P_i = A^{(2^i)}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt.

b) Es sei $k = (a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0)_2$ die Darstellung von k als Dualzahl mit Ziffern $a_0, \dots, a_s \in \{0, 1\}$.
Man zeige, daß dann

$$A^k = (P_s)^{a_s} \cdot (P_{s-1})^{a_{s-1}} \cdot \ldots \cdot (P_1)^{a_1} \cdot (P_0)^{a_0}.$$

gilt.

c) Für die Matrix A aus Aufgabe V-3 berechne man A^{23} mit dem Verfahren aus a) und b).

d) Wieviele Matrixmultiplikationen werden benötigt, um mit dem Verfahren aus b) für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ die Potenz B^{2000} zu berechnen?

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 13.–17. November 2014 behandelt.