Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 4. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1. Das Rezept aus der Vorlesung lautet: Zuerst mit Zeilenumformungen eine Zeilenstufenform erreichen, danach mit Spaltenumformungen in Richtung der Äquivalenznormalform arbeiten.
Im Fall der Matrix A kann man beispielsweise mit den Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & 13 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 8 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & 13 & 6 \\ 0 & -9 & -24 & -24 & -9 \\ 0 & 21 & 56 & 56 & 21 \\ 0 & -3 & -8 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & 13 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & -8 & -8 & -3 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & 13 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix in Zeilenstufenform kann man nun mittels Spaltenumformungen weiter bearbeiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & 13 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\circlearrowleft \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Matrix B verfahren wir analog: Mit den Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

An diesem Punkt (und bei Zeilenstufenform!) angekommen, kann man nun *sowohl* mit Zeilen- *als auch* mit Spaltenumformungen weitermachen, um auf die Äquivalenznormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu kommen.
(Allgemein kann man sich überlegen, daß die Zahl der Einsen in der Äquivalenznormalform immer gleich der Zahl der Nicht-Null-Zeilen in der Zeilenstufenform der Matrix ist.)

Aufgabe T-2.

a) Da die Methoden offengelassen sind, anstelle einer Musterrechnung nur die Zahlenwerte zur Kontrolle: Es ist $\det A = -39$, $\det B = -15$, $\det C = -1$.

b) Es ist $\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = -312$, $\det(A^2) = \det(A)^2 = (-39)^2 = 1521$, $\det(BC) = \det(B) \cdot \det(C) = 15$. (Ein zweites Verfahren besteht jeweils etwa darin, die Matrizen $2A$, A^2 und BC direkt auszurechnen und dann ihre Determinante zu bestimmen. So etwas tut man nur, wenn ein hinterhältiger Aufgabensteller ausdrücklich danach verlangt!)

Aufgabe T-3.

a) Die besonders symmetrische Form der Matrizen A und S legt die Verwendung der Regel von Sarrus nahe: Sie liefert

$$\begin{aligned}\det A &= \sqrt{3}^3 + a^3 + (-\sqrt{3})^3 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) \cdot a \\ &= a^3 + 9a = a \cdot (a^2 + 9).\end{aligned}$$

Wegen $a^2 + 9 \geq 9$ für alle $a \in \mathbb{R}$ ist stets $a^2 + 9 \neq 0$, also gilt

$$\begin{aligned} & A \text{ ist invertierbar} \\ \iff & \det A \neq 0 \\ \iff & a \cdot (a^2 + 9) \neq 0 \\ \iff & a \neq 0 \ \wedge \ a^2 + 9 \neq 0 \\ \iff & a \neq 0.\end{aligned}$$

b) Für die Matrix S erhalten wir analog

$$\begin{aligned}\det S &= \sqrt{3}^3 + a^3 + (-a)^3 - 3 \cdot a \cdot (-a) \cdot \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} + 3a^2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \cdot (1 + a^2).\end{aligned}$$

Wegen $1 + a^2 \geq 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $1 + a^2 \neq 0$ und damit $\det S \neq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$, d.h. S ist stets invertierbar.

Man erkennt hier, daß es nützlich sein könnte, sich allgemein die Determinante einer Matrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

für irgendwelche x, y, z zu merken. Die Regel von Sarrus liefert für die Determinante den Wert

$$\det M = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Den Fall der Matrix A erhält man daraus für $x = \sqrt{3}$, $y = a$, $z = -\sqrt{3}$, den der Matrix S für $x = \sqrt{3}$, $y = a$ und $z = -a$.

c) Hier empfiehlt es sich, den Satz über die Determinante eines Produktes zu verwenden: Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\det(S^{-1}AS) &= \det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S \\ &= \det S^{-1} \cdot \det S \cdot \det A \\ &= \det(S^{-1} \cdot S) \cdot \det A \\ &= \det E \cdot \det A \\ &= 1 \cdot \det A \\ &= \det A.\end{aligned}$$

(Wir haben hier im Prinzip noch einmal mitbewiesen, daß $\det(S^{-1}) = (\det S)^{-1}$ ist; wenn man das schon weiß, geht die Rechnung kürzer, weil man dann direkt

$$\det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S = \det A$$

hat.)

Aufgabe T-4.

a) Eine „naive" Übertragung der Regel von Sarrus würde die Formel

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & \ell \\ m & n & p & q \end{pmatrix} \stackrel{?!}{=} afkq + bg\ell m + chin + dejp - dgjm - ahkn - be\ell p - cfiq$$

ergeben.

b) Hier kann man so gut wie jede Matrix nehmen, die nicht zu viele Nullen enthält. Für die Matrix B aus Aufgabe T-2 beispielsweise würde unsere Formel den Wert

$$0 + 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 0 + 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 = -8$$

ergeben, wir wissen aber, daß der wahre Wert $\det B = -15$ ist.

c) Verallgemeinert man die Regel von Sarrus auf $n \times n$-Matrizen, so erhält man eine Summe aus $2n$ Summanden, von denen die Hälfte mit $+$, die Hälfte mit $-$ erscheint, und die jeweils ein Produkt aus n Einträgen der Matrix (aus verschiedenen Zeilen und Spalten) sind.

Die „wahre" Formel für die Derminante einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ (3.7 in der Vorlesung) lautet aber

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Dies ist ebenfalls eine Summe von Summanden, von denen jeder ein Produkt aus n Einträgen (aus verschiedenen Zeilen und Spalten) der Matrix ist, und von denen die Hälfte (nämlich für $\sigma \in A_n$, wobei $A_n \subset S_n$ die *alternierende Gruppe* ist) mit $+$, die Hälfte mit $-$ versehen werden. Es handelt sich jedoch um so viele Summanden, wie S_n Elemente hat, also um $n!$ Stück. Unsere Sarrus nachempfundene „Regel" liefert nur $2n$ von diesen Summanden (und diese auch im allgemeinen mit dem falschen Vorzeichen).

Wir addieren also in unserer Regel im Prinzip den richtigen Typ von Summanden, allerdings bilden wir zu wenige davon und wählen die Vorzeichen nicht richtig. Eine Ausnahme liegt höchstens dann vor, wenn $n! = 2n$ ist – und dies ist, wie man sich leicht überlegen kann, nur für $n = 3$ der Fall (denn die Gleichung ist äquivalent zu $(n-1)! = 2$, und daraus folgt $n - 1 = 2$); hier stimmen dann „zufällig" auch die Vorzeichen.