Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Lösungsvorschlag zum 3. Tutoriumsblatt

Aufgabe T-1. 2014te Potenzen direkt zu berechnen, wäre etwas zu mühsam.[1] Stattdessen erinnern wir uns an Aufgabe T-2 vom 2. Tutoriumsblatt und versuchen, eine allgemeine Formel für *alle* Potenzen von A und B zu finden.
Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1, \end{pmatrix}$$

also passiert genau das gleiche wie bei Matrix C aus Aufgabe T-2 vom 2. Tutoriumsblatt: Wegen $A^3 = -E$ (ich schreibe E statt E_3) ist $A^6 = (A^3)^2 = (-E)^2 = E$ und damit $A^{k+6} = A^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, woraus sogar $A^{6\ell+k} = A^k$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ folgt. Da nun $2014 = 6 \cdot 335 + 4$ ist, folgt

$$A^{2014} = A^4 = A^3 \cdot A = -E \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix B erhalten wir

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also passiert hier das gleiche wie bei der Matrix B in Aufgabe T-2 vom 2. Tutoriumsblatt: Aus $B^3 = 0$ folgt $B^k = 0$ für *alle* $k \geq 3$, also ist $B^{2014} = 0$.

Aufgabe T-2. Das in der Vorlesung erklärte Standardverfahren zum Invertieren (und Feststellen von Invertierbarkeit) besteht ja darin, die gegebene Matrix *gleichzeitig mit der Einheitsmatrix* mit Zeilenumformungen zu traktieren, bis sie Zeilenstufenform bekommen hat (dann kann man ihre Invertierbarkeit daran erkennen, ob die Zeilenstufenform frei von Nullzeilen ist) bzw. bis sie zur Einheitsmatrix geworden ist (dann ist die Einheitsmatrix zur gesuchten Inversen geworden). Also ans Werk!

[1] Es ist aber nicht so schlimm, wie es aussieht: zum einen werden wir auf einem der nächsten Übungsblätter sehen, wie man hohe Potenzen effizient mittels „wiederholtem Quadrieren" berechnen kann; zum anderen kann man mit Hilfe der Eigenwerttheorie beweisen, daß jede Potenz einer $n \times n$-Matrix A alleine durch die ersten paar Potenzen $E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ ausgedrückt werden kann.

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

Hier haben wir in dem Moment, in dem links Zeilenstufenform erreicht war, bereits die Einheitsmatrix erhalten. Also ist A invertierbar mit

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Für die Matrix B ergibt sich

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).
$$

Hier haben wir links Zeilenstufenform erreicht, die jedoch eine Nullzeile enthält. Also ist B nicht invertierbar, und wir können das Rechnen einstellen. (Übrigens ist die Nicht-Invertierbarkeit schon dann nachgewiesen, wenn *irgendwann* links eine Nullzeile entsteht, auch wenn noch keine Zeilenstufenform erreicht ist.)

Für die Matrix C schließlich ergibt sich

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).
$$

Hier ist links eine Nullzeile entstanden, so daß C nicht invertierbar ist.

Aufgabe T-3.

a) Es ist

$$\begin{aligned} A_\alpha \cdot A_\beta &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{1}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta & \frac{1}{2}\beta^2 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha+\beta & \frac{1}{2}\beta^2 + \alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und wegen $\frac{1}{2}\beta^2 + \alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \frac{1}{2} \cdot (\alpha+\beta)^2$ folgt die Behauptung $A_\alpha \cdot A_\beta = A_{\alpha+\beta}$.

b) Die erste Beobachtung ist, daß $A_0 = E_3$ die Einheitsmatrix ist. Nun erkennt man, daß man einfach $A_{-\alpha}$ nehmen kann: Denn nach a) ist $A_\alpha \cdot A_{-\alpha} = A_{\alpha+(-\alpha)} = A_0 = E_3$ und ebenso $A_{-\alpha} \cdot A_\alpha = A_0 = E_3$, also ist $A_{-\alpha} = A_\alpha^{-1}$.

c) Es ist

$$\begin{aligned} A_{3\alpha} - 3A_{2\alpha} + 3A_\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & \frac{1}{2}(3\alpha)^2 \\ 0 & 1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & \frac{1}{2}(2\alpha)^2 \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{1}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & \frac{9}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 3 & 6\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & \frac{3}{2}\alpha^2 \\ 0 & 3 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \end{aligned}$$

wie behauptet.

d) Die in c) bewiesene Gleichung bedeutet, unter Verwendung von a), daß für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 = A_{3\alpha} - 3A_{2\alpha} + 3A_\alpha - E = A_\alpha^3 - 3A_\alpha^2 + 3A_\alpha - E,$$

also kann man $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = 3$, $a_0 = -1$ nehmen.

Diese Aussage kann man auch folgendermaßen bekommen: Da die Matrix A_α so aussieht, wie sie aussieht, enthält $A_\alpha - E$ ausschließlich Einträge rechts oberhalb der Diagonalen. Für solche Matrizen ist nicht so schwer einzusehen, daß (im Fall von 3×3-Matrizen) ihre dritte Potenz verschwindet, also ist $(A_\alpha - E)^3 = 0$. Die linke Seite kann man nun ausmultiplizieren, wobei – wenn man genau aufpaßt, was man tut – sogar die binomische Formel $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ verwendet werden darf.)

Aufgabe T-4.

a) Wir arbeiten mit dem schon in Aufgabe T-2 erprobten Rechenverfahren, wobei es sich als besonders effizient erweist, zuerst mittels der dritten die zweite Zeile und danach mittels der ersten die dritte

Zeile zu vereinfachen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ s^2 & 1 & s & 0 & 1 & 0 \\ s & s^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & 0 & 0 & 1 & -s \\ s & s^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & 0 & 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1-s^3 & -s & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hier ist links Zeilenstufenform erreicht. Es ist genau dann keine Nullzeile enthalten (und damit A_s invertierbar), wenn $1 - s^3 \neq 0$ ist, wenn also $s^3 \neq 1$ ist. Für $s \in \mathbb{R}$ ist für fast alle Zahlen der Fall, die einzige Ausnahme ist $s = 1$.[2]

Zum Bestimmen der Inversen müssen wir nur noch wenig weiterrechnen:

$$\ldots \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array}\right)$$
$$\curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1+\frac{s^3}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array}\right).$$

Das bedeutet, daß für $s \neq 1$ gilt

$$A_s^{-1} = \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Im Falle $s \neq 1$ ist A_s invertierbar, so daß man das lineare Gleichungssystem einfach durch Auflösen (d.h. Multiplikation mit A_s^{-1} von links) lösen kann:

$$A_s \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_s^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1-s \\ 1-s \\ 1-s \end{pmatrix} = \frac{1-s}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{s^2+s+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

[2]Wenn komplexe Zahlen zugelassen wären, gäbe es zwei weitere Zahlen mit $s^3 = 1$, nämlich die dritten Einheitswurzeln!

so daß die Lösungsmenge nur aus einem Element besteht:

$$L_s = \left\{ \frac{1}{s^2+s+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Im Fall $s = 1$ dagegen müssen wir das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Verfahren lösen, das hier besonders übersichtlich ausfällt:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \curvearrowright \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Wir haben Zeilenstufenform erreicht, und es existiert nur eine von null verschwindende Zeile. Wir können also $x_2 = \lambda$ und $x_3 = \mu$ beliebig wählen und erhalten dann $x_1 = 1 - x_2 - x_3 = -\lambda - \mu$, so daß die Lösungsmenge im Fall $s = 1$ die Gestalt

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

hat.