Mathematisches Institut der Universität München — Daniel Rost
Wintersemester 2014/15 — Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
3. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1. Man lese in der Vorlesung die Definition der Invertierbarkeit einer Matrix (2.16), das Invertierbarkeitskriterium für 2×2-Matrizen (2.18) und das Rechenverfahren zum Invertieren von Matrizen (2.22/2.23) sorgfältig nach.

Aufgabe V-2. Man entscheide, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind, und gebe in diesen Fällen jeweils die inverse Matrix an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dazu verwende man jeweils *sowohl* das Kriterium aus 2.18 *als auch* das Rechenverfahren aus 2.22/2.23.

Aufgabe V-3. Man entscheide (in Abhängigkeit von $s, t \in \mathbb{R}$), welche der folgenden Matrizen invertierbar sind, und gebe in diesen Fällen jeweils die inverse Matrix an:

$$\begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} s & t \\ -s & t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix}$$

Aufgabe V-4. Man lese in der Vorlesung die Definition der Elementarmatrizen sorgfältig nach und untersuche, welche der folgenden Matrizen Elementarmatrizen (und wenn ja, von welchem Typ) sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: A ist nicht quadratisch, also keine Elementarmatrix. B ist Elementarmatrix vom Typ I. C ist Elementarmatrix vom Typ III. D ist Elementarmatrix vom Typ II.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1. Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

berechne man die Potenzen A^{2014} und B^{2014}.

Aufgabe T-2. Man entscheide, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind, und bestimme gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe T-3 (Staatsexamen Frühjahr 2001). Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{1}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Man zeige, daß für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $A_\alpha \cdot A_\beta = A_{\alpha+\beta}$.

b) Man bestimme unter Zuhilfenahme von a) die zu A_α inverse Matrix.

c) Man zeige durch direkte Rechnung $A_{3\alpha} - 3A_{2\alpha} + 3A_\alpha = E$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Man bestimme mit Hilfe von a) und c) reelle Zahlen $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, die nicht alle $= 0$ sind, so daß für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $a_3 A_\alpha^3 + a_2 A_\alpha^2 + a_1 A_\alpha + a_0 E = 0$.

Aufgabe T-4 (Staatsexamen Herbst 2002). Für den reellen Parameter $s \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s^2 & 1 & s \\ s & s^2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man bestimme alle $s \in \mathbb{R}$, für die die Matrix A_s invertierbar ist, und berechne in diesen Fällen die inverse Matrix A_s^{-1}.

b) Man bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$A_s \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 30. Oktober–3. November 2014 behandelt.