Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
2. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1. Man lese die Definition des Produktes zweier Matrizen (2.9 in der Vorlesung) und der transponierten Matrix (2.2 in der Vorlesung) sorgfältig nach.

Aufgabe V-2. Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

berechne man $A^\top$ und $B^\top$ sowie die Produkte $A \cdot B$ und $B^\top \cdot A^\top$. Man vergleiche die Ergebnisse!

Aufgabe V-3. Was muß für die Zeilen- bzw. Spaltenanzahlen zweier Matrizen A, B gelten, damit das Produkt $A \cdot B$ gebildet werden kann, und welches Format hat dann das Produkt? Man formuliere eine Merkregel (am besten gereimt)!

Aufgabe V-4. Für die beiden „Matrizen"

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

existiert sowohl das Produkt $A \cdot B$ als auch das Produkt $B \cdot A$. (Man überprüfe dies anhand der in V-3 gefundenen Merkregel!) Man berechne beide Produkte. Was fällt an den Zeilen bzw. Spalten der Matrix $B \cdot A$ auf?

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1. Man berechne für die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

alle Produkte mit je zwei Faktoren, sofern sie definiert sind.

Aufgabe T-2. Man berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 18 & -15 \\ 6 & 7 & -5 \\ 30 & 30 & -24 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

alle Potenzen, d.h. die Matrizen A^r, B^r, C^r für alle $r \geq 1$.
(Anleitung: Man starte mit kleinen Werten von r und rechne so lange, bis sich ein Muster abzeichnet. Formal läßt sich ein solches Muster dann beispielsweise mit vollständiger Induktion beweisen.)

Aufgabe T-3. Wir betrachten für $n \geq 2$ die Matrizen

$$L_n := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

a) Man berechne die Produkte $L_4 \cdot Q$ und $U_4 \cdot Q$ für

$$Q := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Was kann man beobachten?

b) Man formuliere eine Vermutung über das Aussehen von $L_n \cdot A$ bzw. $U_n \cdot A$, wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine beliebige Matrix ist.

c) Man beweise die Vermutung aus b) durch Berechnen von $L_n \cdot A$ und $U_n \cdot A$ für

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

d) Wie sieht ein Produkt $B \cdot L_n$ bzw. $B \cdot U_n$ aus, wenn $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine beliebige Matrix ist? Man versuche eine Antwort, ohne die Matrixprodukte konkret auszurechnen!

(Hinweis: Transponieren von Matrizen hilft!)

Aufgabe T-4. Man bestimme alle Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A^2 = 0$.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 23.–27. Oktober 2014 behandelt.