Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
13. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1. Man überlege, welche der folgenden Aussagen, die für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gelten können, gültig bleiben, wenn man A mit elementaren Zeilenumformungen bearbeitet, und welche, wenn man elementare Spaltenumformungen verwendet:

a) „Die Spalten von A sind linear abhängig.“

b) „Die dritte Spalte von A ist das Doppelte der Summe der ersten beiden Spalten.“

c) „A ist symmetrisch.“

d) „Die vierte Zeile von A läßt sich als Linearkombination der übrigen Zeilen darstellen.“

e) „Die Zeilen von A sind linear unabhängig.“

f) „Der Vektor $e_1 \in \mathbb{R}^m$ läßt sich als Linearkombination der Spalten von A schreiben.“

Lösung:
Zeilenumformungen erhalten die Gültigkeit von a), b), e).
Spaltenumformungen erhalten die Gültigkeit von a), d), e) und f).

Aufgabe V-2.

a) Man lese in der Vorlesung die Aussagen über die Bedeutung des Ranges für die Lösungsmenge eines (homogenen oder inhomogenen) linearen Gleichungssystems (6.9 und der Abschnitt davor) sorgfältig nach.

b) Man versuche die Aussagen aus 6.9 zu begründen.

Aufgabe V-3. Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind linear im Sinne der Definition 7.1 der Vorlesung? Welche sind nur additiv, welche nur homogen, welche keines von beiden?

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = x + 1$ c) $f(x) = x^2$
d) $f(x) = 3x + 5$ e) $f(x) = 0$ f) $f(x) = e^x$

Lösung:
a) und e) sind linear. c) ist homogen, aber nicht additiv; b), d) und e) sind keines von beiden.
(Daß in diesen Beispielen der Fall „additiv, aber nicht homogen“ nicht vorkommt, liegt daran, daß sich die Frage nach der Existenz solcher Funktionen im Fall $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überraschenderweise als *sehr* schwierig und subtil herausstellt. Die Antwort lautet nämlich: Man kann zwar beweisen, daß es solche Funktionen geben muß, jedoch kein Beispiel hinschreiben ...)

Aufgabe V-4. Man lerne für lineare Abbildungen von Vektorräumen die folgenden Begriffspaare auswendig (so etwas kommt selten genug im Mathematikstudium vor!):

$$\begin{array}{rcl} \text{Homomorphismus} & \leftrightarrow & \text{lineare Abbildung} \\ \text{Mono}\ldots & \leftrightarrow & \text{injektiv} \\ \text{Epi}\ldots & \leftrightarrow & \text{surjektiv} \\ \text{Iso}\ldots & \leftrightarrow & \text{bijektiv} \\ \text{Endo}\ldots & \leftrightarrow & \text{Quelle} = \text{Ziel} \\ \text{Auto}\ldots & \leftrightarrow & \text{bijektiv und Quelle} = \text{Ziel} \end{array}$$

Man versuche außerdem die ungefähre Bedeutung der griechischen Vorsilben „homo-“, „mono-“, „epi-“, „iso-“, „endo-“ und „auto-“ nachzuschlagen und sich zu überlegen, warum die Bezeichnungen so gewählt sind. (Damit ergeben sich gute Merkhilfen für die obigen Begriffspaare!)

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1. Für den reellen Parameter t sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} t & t^2 & t^3 \\ t^3 & t & t^2 \\ t^2 & t^3 & t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -t & t \\ -t & -t & t \\ t & t & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. Man bestimme in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Rang von A bzw. B.

Aufgabe T-2 (Staatsexamen Herbst 2006). In Abhängigkeit von den beiden Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ betrachte man das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3+\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Man untersuche, wann dieses Gleichungssystem lösbar ist, und bestimme in diesem Fall die Dimension d des Lösungsraumes.

   (Bemerkung: Da der Lösungsraum L eines inhomogenen *linearen Gleichungssystems kein Untervektorraum ist, verbietet es sich eigentlich, von seiner Dimension zu sprechen. Er hat jedoch die Form $L = x_p + L_0$, wobei x_p eine „partikulären“ Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ist und L_0 der Lösungsraum zugehörigen homogenen Gleichungssystems. Letzterer ist ein Untervektorraum, und gemeint ist* seine *Dimension.)*

b) Man ermittele in den beiden Fällen $\alpha = \beta = 1$ und $\alpha = \beta = 0$ jeweils explizit alle rellen Lösungen dieses linearen Gleichungssystems.

Aufgabe T-3 (Staatsexamen Frühjahr 1993). Man bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Aufgabe T-4. Man bestimme in Abhängigkeit vom reellen Parameter α den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 - 1 & 2 \\ -2\alpha & -\frac{3}{2}\alpha & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

sowie die Dimension des Untervektorraums $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 22.–26. Januar 2015 behandelt.