Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
10. Tutoriumsblatt

Vorbereitende Aufgaben (vor Besuch des Tutoriums selbständig zu bearbeiten)

Aufgabe V-1.

a) Man lese die Definition einer Basis und der Koordinaten bzw. Komponenten eines Vektors bezüglich einer Basis sowie die Defintion der Dimension eines Vektorraumes (5.1 und 5.8) sorgfältig nach.

b) Man lese die grundlegenden Sätze über Basen von Vektorräumen (5.6, 5.7, 5.10) sorgfältig nach und formuliere ihre Aussagen in eigenen Worten.

c) Inwiefern ist die Definition 5.8 auf Satz 5.6 angewiesen?

Aufgabe V-2.

a) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $v_1, \dots, v_n$. Bezüglich dieser Basis wurde in der Vorlesung die *Koordinatenabbildung* $p : V \to \mathbb{R}^3$ behandelt (Lemma 5.4); man lese ihre Definition sorgfältig nach und gebe sie in eigenen Worten wieder. Wie lautet der Zusammenhang zum Begriff der „Koordinaten“ (5.1 b))?

b) Es sei nun speziell

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sowie $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ (und $p : V \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung bezüglich der Basis v_1, v_2). Man rechne nach, daß

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in V liegen, und daß

$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(u_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe V-3. Im Vektorraum $V = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ der Polynome vom Grad ≤ 2 betrachten wir zum einen die Koordinatenabbildung

$$p_1 : V \to \mathbb{R}^3 \quad \text{bezüglich der Basis } x^2, x, 1$$

und zum anderen die Koordinatenabbildung

$$p_2 : V \to \mathbb{R}^3 \quad \text{bezüglich der Basis } x^2 + x, x + 1, 1 + x^2.$$

a) Man prüfe nach, daß für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$p_1(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_2(ax^2 + bx + c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b - c \\ b + c - a \\ c + a - b \end{pmatrix}.$$

b) Für welche Polynome $f \in V$ gilt $p_1(f) = p_2(f)$?

Aufgabe V-4.

a) Es seien $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ gegebene Vektoren, und es sei $U := \langle v_1, \dots, v_r \rangle \subset \mathbb{R}^n$ der von ihnen erzeugte („explizit gegebene") Untervektorraum. Man formuliere (schriftlich, vollständig und verständlich) eine Regel zur Berechnung der Dimension $\dim U$.

   (Hinweis: Ein Blick in Beispiel 5.11 b) lohnt sich!)

b) *(Zum Forschen und freiwillig:)* Wenn $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine gegebene Matrix ist, wie läßt sich dann die Dimension des („implizit gegebenen") Untervektorraumes $W := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ berechnen?

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T-1. Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, und es sei $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig sind.

b) Man zeige, daß v_1, v_2, v_4 eine Basis von V ist, und stelle v_3 als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.

c) Man ergänze v_1, v_2, v_4 zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe T-2. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet, wie üblich, $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome f mit $\mathrm{Grad}(f) \leq n$. Laut Vorlesung (5.9 b)) ist $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$.
Man entscheide, ob die Polynome $1,\ x+1,\ x^2+x+1,\ x^3+x^2+x+1$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ bilden.

Aufgabe T-3. In dieser und der nächsten Aufgabe beweisen wir Lemma 5.4 aus der Vorlesung.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Es sei

$$p : V \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

die *Koordinatenabbildung* bzgl. der Basis $v_1, \ldots, v_n$ (vgl. 5.5 in der Vorlesung). Weiter sei die Abbildung

$$q : \mathbb{R}^n \to V, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

gegeben, die „in die andere Richtung als p“ arbeitet.

a) Man begründe, daß $p \circ q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $q \circ p = \mathrm{id}_V$ ist.
(Insbesondere ist also p bijektiv mit $p^{-1} = q$.)

b) Man rechne nach, daß für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$q(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 0_V,$$

$$q(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}) = q(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}) + q(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}),$$

$$q(\alpha \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}) = \alpha \cdot q(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}).$$

c) Man folgere aus a) und b), daß für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} p(\lambda \cdot v) &= \lambda \cdot p(v), \\ p(u+v) &= p(u) + p(v), \\ p(0_V) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anleitung: Da q bijektiv ist, ist Anwenden von q eine Äquivalenzumformung. Man kann also beispielsweise folgendermaßen beginnen:

$$\begin{aligned} & p(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot p(v) \\ \iff \quad & q(p(\lambda \cdot v)) = q(\lambda \cdot p(v)) \\ \overset{b)}{\iff} \quad & \ldots \end{aligned}$$

Aufgabe T-4. In der Situation von Aufgabe T-3 seien zusätzlich $v, w_1, \ldots, w_r \in V$ und $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$.

a) Man beweie die Äquivalenz

$$v = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_r w_r \quad \iff \quad p(v) = \mu_1 p(w_1) + \ldots + \mu_r p(w_r).$$

b) Man beweise die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & w_1, \ldots, w_r \text{ ist Erzeugendensystem von } V \\ \iff \quad & p(w_1), \ldots, p(w_r) \text{ ist Erzeugendensystem von } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Anleitung: Man beweise die Richtungen „$\Longrightarrow$“ und „$\Longleftarrow$“ einzeln. Der Beweis von $\Longrightarrow$ könnte folgendermaßen beginnen:

> *„Angenommen, $w_1, \ldots, w_r$ ist ein Erzeugendensystem von V. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig; wir müssen zeigen, daß x Linearkombination von $p(w_1), \ldots, p(w_r)$ ist. [...]“*

c) Man beweise die Äquivalenz

$$w_1, \ldots, w_r \in V \text{ linear unabhängig} \quad \iff \quad p(w_1), \ldots, p(w_r) \in \mathbb{R}^n \text{ linear unabhängig.}$$

(Hinweis: Man beweise die Richtungen „$\Longrightarrow$“ und „$\Longleftarrow$“ einzeln.)

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 18.–22. Dezember 2014 behandelt.