Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I – 8. Zentralübungsblatt

Man beweise durch vollständige Induktion:

1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$.
3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=1}^{n}(3k - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$.
4) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ ist $n^2 - 2n - 1 > 0$. (Direkt und mit Induktion!)
5) Zeige: Die Summe der Innenwinkel in einem konvexen n-Eck ist $(n - 2) \cdot 180°$.

Was ist von den folgenden Sätzen und Beweisen zu halten?

- *Satz.* In meinen Koffer passen beliebig viele Taschentücher.

  Beweis. Wir zeigen die Aussage

  $$A(n) : \text{In meinen Koffer passen } n \text{ Taschentücher}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ ist die Aussage sicher wahr: In meinen Koffer paßt ein Taschentuch. Es sei nun $n \geq 1$ und schon bewiesen, daß n Taschentücher in meinen Koffer passen. Aber, egal wie voll ein Koffer ist: Ein Taschentuch paßt immer noch hinein. Also passen auch $n + 1$ Taschentücher in meinen Koffer, und daraus folgt die Behauptung mittels vollständiger Induktion.

- *Satz.* Jede ungerade natürliche Zahl ist ein Vielfaches von 2.

  Beweis. Ist n eine ungerade Zahl, und ist schon bekannt, daß n ein Vielfaches von 2 ist, also $n = 2k$ für ein k, so ist die nächste ungerade Zahl $n + 2 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ wieder ein Vielfaches von 2. Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung.