Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I – 9. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion I). Man beweise mittels vollständiger Induktion die folgenden Formeln:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Aufgabe 2 (Peanostrukturen). Es sei $N = \mathbb{R}_0^+$, $n_0 = 0$ und $\nu : N \to N$, $\nu(n) = n+1$. Ist (N, n_0, ν) eine Peanostruktur? Falls nein: Welche der drei definierenden Eigenschaften einer Peanostruktur sind erfüllt, welche nicht?

Aufgabe 3 (Vollständige Induktion II). Man beweise die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, indem man die schärfere Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion beweist.

Aufgabe 4 (Teilbarkeit). Man beweise die folgenden Teilbarkeitsaussagen mittels Induktion nach n:

a) $6 \mid (2n^3 + 3n^2 + n)$ und $8 \mid (3^{2n} + 7)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $(a^2 + a + 1) \mid (a^{n+1} + (a+1)^{2n-1})$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir wünschen allen Teilnehmern der Vorlesung ein friedliches Weihnachtsfest und ein glückliches und erfolgreiches neues Jahr!

Die Abgabe dieses Blattes ist freiwillig, wird aber dringend empfohlen.
(Vollständige Induktion ist eines der wichtigsten Themen der Vorlesung!)

Lösungen, die korrigiert und gewertet werden sollen, sind spätestens am **Freitag, 10. Januar 2013, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibiothek) einzuwerfen.