

Grundlagen der Mathematik I – 8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Bestimmung einer Umkehrfunktion). Man zeige, daß die Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad f(x, y) = (2x - 3y, 3x - 6y)$$

bijektiv ist, und gebe die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ explizit an.

Aufgabe 2 (Injektivität und Surjektivität). Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g(y) = \sqrt{4 + y^2} + y.$$

a) Man bestimme die Abbildungsvorschrift der beiden Verknüpfungen

$$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und überprüfe damit f auf Injektivität und Surjektivität.

b) Man gebe $M = f^{-1} \left(\left] -\infty, \frac{3}{2} \right] \right)$ mit Hilfe geeigneter Intervalle von \mathbb{R} an und skizziere M auf der Zahlengeraden.

Aufgabe 3 (Bestätigung einer Umkehrfunktion). Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad f(x, y) = (x - y, xy)$$

und

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad g(u, v) = \left(\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}, -\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} \right).$$

Man zeige, daß f bijektiv mit $f^{-1} = g$ ist.

Aufgabe 4 (Weihnachten).

a) Die Student(innen und Student)en der Vorlesung „Grundlagen der Mathematik 17“ veranstalten in diesem Jahr ein Wichteln: Jeder Teilnehmer steckt einem anderen Teilnehmer heimlich ein Weihnachtsgeschenk zu. Es sei bekannt, daß niemand mehr als ein Geschenk bekommen hat. Man zeige, daß dann jeder Teilnehmer ein Geschenk erhalten hat.

(Anleitung: Man betrachte eine geeignete Abbildung.)

b) Auch die himmlischen Engel wichteln in diesem Jahr untereinander, und auch bei ihnen erhält kein Engel mehr als ein Geschenk. Kann es passieren, daß ein Engel leer ausgeht? Kann es passieren, daß unendlich viele Engel leer ausgehen? (Bekanntlich gibt es genau so viele himmlische Engel, wie es natürliche Zahlen gibt, d.h. die Menge der Engel ist gleichmächtig zu \mathbb{N} .)

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 20. Dezember 2013, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen.