Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Es sei $y \in f(f^{-1}(B))$; nach Definition von $f(\dots)$ bedeutet das, daß es ein $x \in f^{-1}(B)$ gibt mit $y = f(x)$. Nach Definition von $f^{-1}(B)$ ist dann aber $f(x) \in B$, und wegen $f(x) = y$ folgt $y \in B$. Also gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) Beispielsweise kann man $M = \mathbb{N}$, $N = \mathbb{Z}$ und $B = \{-1\} \subset \mathbb{Z}$ wählen und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ (die sogenannte „Einbettungsabbildung"). Dann ist $f^{-1}(B) = \emptyset$ und damit auch $f(f^{-1}(B)) = \emptyset \subsetneqq B$.

Ähnlich wie in Aufgabe 1 vom Tutoriumsblatt kann man ein solches Beispiel finden, indem man versucht, die Aussage „$B \subset f(f^{-1}(B))$" zu beweisen. Dazu müssen wir also $y \in B$ als gegeben annehmen; um zu beweisen, daß y auch in $f(f^{-1}(B))$ läge, müßte erst einmal y *überhaupt* von der Abbildung f getroffen werden – und dafür gibt es im allgemeinen keinen Grund. Wir müssen also zur Konstruktion eines Gegenbeispiels nur die Mengen und die Abbildung so wählen, daß B ein Element besitzt, das nicht von f getroffen wird.

Aufgabe 2.

a) Die Abbildung f ist **injektiv**, denn aus $f(x_1) = f(x_2)$, also $3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$, folgt sofort $3x_1 = 3x_2$ und damit $x_1 = x_2$. Die Abbildung f ist jedoch **nicht surjektiv**, denn für alle $x \in \mathbb{Z}$ ist $f(x) - 4 = 3x$ eine durch 3 teilbare Zahl. Für die Zahl $y := 5$ beispielsweise ist aber $y - 4 = 1$ *nicht* durch 3 teilbar, also kann es ein $x \in \mathbb{Z}$ geben mit $f(x) = 5$.

b) Die Abbildung g ist **injektiv** nach genau dem gleichen Argument wie in a). Aber g ist auch **surjektiv**, denn für jedes gegebene $y \in \mathbb{Q}$ ist $x := \frac{1}{3}(y-4)$ ein Element von $\mathbb{Q}$ mit $g(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}(y-4) + 4 = (y-4) + 4 = y$.

c) Die Abbildung h ist **nicht injektiv**, denn es ist beispielsweise $h(1,0) = 0 = h(0,1)$. Aber h ist **surjektiv**, denn für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist beispielsweise $h(1,y) = y$.

d) Die Abbildung k ist **injektiv**, denn die Beziehung $k(x_1) = k(x_2)$, also $(x_1^2+1, (x_1+1)^2) = (x_2^2+1, (x_2+1)^2)$ bedeutet $x_1^2+1 = x_2^2+1$ sowie $(x_1+1)^2 = (x_2+1)^2$, also $x_1^2+2x_1+1 = x_2^2+2x_2+1$. Abziehen der ersten Gleichung liefert $2x_1 = 2x_2$, woraus $x_1 = x_2$ folgt.

Dagegen ist k **nicht surjektiv**, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 \geq 0$, also ist die erste Koordinate $x^2 + 1$ von $k(x)$ eine Zahl ≥ 1 (und die zweite Koordinate eine Zahl ≥ 0). Beispielsweise gibt es also kein $x \in \mathbb{R}$ mit $k(x) = (-1, 0)$.

Aufgabe 3. Wir bezeichnen Elemente von L mit $x, x_1, \dots$, Elemente von M mit $y, y_1, \dots$ und Elemente von N mit $z, z_1, \dots$. (Mathematisch ist eine solche Vereinbarung bedeutungslos, aber sie kann enorm helfen, nicht durcheinanderzukommen – ich empfehle sie für die eigene Arbeit wärmstens!)

a) Diese Aussage ist **falsch**. Ein Gegenbeispiel findet sich in Aufgabe 3 vom 7. Tutoriumsblatt; ein weiteres ist das folgende: Setze $L = N = \{0\}$ und $M = \mathbb{N}$, also

$$\{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \{0\}\,.$$

Dabei ist egal, welche Abbildung g genommen wird (für f gibt es ohnehin nur eine einzige Möglichkeit: alles geht auf 0). In jedem Fall ist $f \circ g = \mathrm{id}_{\{0\}}$ injektiv (sogar bijektiv), aber f ist nicht injektiv, da etwa $f(1) = 0 = f(2)$ ist.

b) Diese Aussage ist **wahr**. Zum Beweis seien $x_1, x_2 \in L$ mit $g(x_1) = g(x_2)$. Da wir nur etwas über $f \circ g$ wissen, liegt es nahe, auf die angenommene Gleichheit die Abbildung f anzuwenden: dann folgt also $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, d.h. $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$. Aber $f \circ g$ ist injektiv, und damit folgt $x_1 = x_2$, was zu zeigen war.

c) Diese Aussage ist **wahr**. Zum Beweis sei $z \in N$ vorgegeben. Wir wissen, daß die Abbildung $f \circ g : L \to N$ surjektiv ist; also gibt es ein $x \in L$ mit $z = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Mit $y := g(x)$ ist dann aber $z = f(y)$, d.h. wir haben ein Element von M gefunden, das durch f auf z abgebildet wird. Dies beweist die Surjektivität von f.

d) Diese Aussage ist **falsch**. Auch hierfür findet sich in Aufgabe 3 vom 7. Tutoriumsblatt ein Gegenbeispiel; unser unter a) angegebenes läßt sich jedoch auch hier dienbar machen: Denn $f \circ g$ ist bijektiv, also auch surjektiv, jedoch ist g nicht surjektiv (da ja nur ein einziges Element von $\mathbb{N}$ getroffen wird).

Aufgabe 4. Eine andere Art, die Definition der Menge X zu formulieren, ist

$$X = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{N},\ a \leq b \right\}$$

Die Brüche dieser Form $\frac{a}{b}$ werden alle getroffen beispielsweise von einer Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ mit der folgenden Wertetabelle:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$f(x)$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	...

Hier werden also zunächst alle Brüche mit Nenner 1 und Zähler ≤ 1 angesteuert (davon gibt es nur einen), danach alle Brüche mit Nenner 2 und Zähler ≤ 2, als nächstes diejenigen mit Nenner 3 und Zähler ≤ 3 usw., jeweils der Größe nach sortiert. Nach Konstruktion ist f surjektiv, denn jeder Bruch der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $a \leq b$ taucht an einer bestimmten Stelle in der Wertetabelle auf.

Die Abbildung f formelmäßig anzugeben, ist weitaus schwieriger. Tatsächlich kann man nachweisen (und das Rüstzeug dazu wird uns auch im Prinzip bald zur Verfügung stehen), daß für alle $x \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x \cdot \left\lceil \frac{\sqrt{8x+1} - 1}{2} \right\rceil^{-1} - \frac{1}{2} \left\lceil \frac{\sqrt{8x+1} - 3}{2} \right\rceil$$

gilt, wobei $\lceil a \rceil$ die *Aufrundung* von a (also die kleinste ganze Zahl $\geq a$) bezeichnet. Für eine Herleitung dieser Formel oder einen Beweis ihrer Richtigkeit setze ich hiermit eine Maß Bier aus; der Wettbewerb steht allen angemeldeten Student(inn)en, Tutor(inn)en und Korrektor(inn)en der Vorlesung offen und läuft bis zur Klausur.

Zusatzaufgabe. Das Verfahren, das in Aufgabe 4 funktioniert hat, scheitert hier, weil es in der Zielmenge nicht mehr nur *endlich viele* Brüche zu jedem festen Nenner gibt. Es gibt aber dennoch eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$! Einen Weg, sie anzugeben, kann man durch folgende Beobachtung finden: Das

Konstruktionsprinzip der Abbildung f aus Aufgabe 4 läßt sich folgendermaßen graphisch veranschaulichen:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{1} \\[2ex]
\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{2}{2} \\[2ex]
\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{3}{3} \\[2ex]
\frac{1}{4} \longrightarrow \frac{2}{4} \longrightarrow \frac{3}{4} \longrightarrow \frac{4}{4} \\[2ex]
\frac{1}{5} \longrightarrow \frac{2}{5} \longrightarrow \dots
\end{array}$$

Die Wertetabelle von f entsteht dabei, indem man entlang der Pfeile läuft und die Brüche notiert, an denen man vorbeikommt.
Unsere jetzige Aufgabenstellung läuft darauf hinaus, einen „Pfad“ durch die Tabelle

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \dots \\[3ex]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \dots \\[3ex]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \dots \\[3ex]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \dots \\[3ex]
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \dots \\[3ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

zu finden, der an jedem Bruch (mindestens) einmal vorbeikommt. Dafür gibt es tatsächlich viele Möglichkeiten, etwa

$$
\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{2}{1} \arrow[d] & \frac{3}{1} \arrow[r] & \frac{4}{1} \arrow[d] & \frac{5}{1} \arrow[r] & \frac{6}{1} \arrow[d] \\
\frac{1}{2} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[l] & \frac{3}{2} \arrow[u] & \frac{4}{2} \arrow[d] & \frac{5}{2} \arrow[u] & \vdots \\
\frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{2}{3} \arrow[r] & \frac{3}{3} \arrow[u] & \frac{4}{3} \arrow[d] & \frac{5}{3} \arrow[u] & \\
\frac{1}{4} \arrow[d] & \frac{2}{4} \arrow[l] & \frac{3}{4} \arrow[l] & \frac{4}{4} \arrow[l] & \frac{5}{4} \arrow[u] & \\
\frac{1}{5} \arrow[r] & \frac{2}{5} \arrow[r] & \frac{3}{5} \arrow[r] & \frac{4}{5} \arrow[r] & \frac{5}{5} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

was zur Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$f(x)$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	...

führt, oder (dies ist ein berühmter Weg, bekannt als das *Erste Cantorsche Diagonalverfahren*)

$$
\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{2}{1} \arrow[dl] & \frac{3}{1} \arrow[r] & \frac{4}{1} \arrow[dl] & \frac{5}{1} \arrow[r] & \frac{6}{1} \arrow[dl] \\
\frac{1}{2} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \frac{5}{2} \arrow[dl] & \frac{6}{2} \arrow[d] \\
\frac{1}{3} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{4}{3} \arrow[dl] & \frac{5}{3} \arrow[ur] & \vdots \\
\frac{1}{4} \arrow[d] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{3}{4} \arrow[dl] & \frac{4}{4} \arrow[ur] & & \\
\frac{1}{5} \arrow[ur] & \frac{2}{5} \arrow[dl] & \frac{3}{5} \arrow[ur] & & & \\
\frac{1}{6} \arrow[r] & \frac{2}{6} \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}
$$

mit der Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$f(x)$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$	...