

Grundlagen der Mathematik I

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1.

- a) Es sei $y \in f(f^{-1}(B))$; nach Definition von $f(\dots)$ bedeutet das, daß es ein $x \in f^{-1}(B)$ gibt mit $y = f(x)$. Nach Definition von $f^{-1}(B)$ ist dann aber $f(x) \in B$, und wegen $f(x) = y$ folgt $y \in B$. Also gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
- b) Beispielsweise kann man $M = \mathbb{N}$, $N = \mathbb{Z}$ und $B = \{-1\} \subset \mathbb{Z}$ wählen und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ (die sogenannte „Einbettungsabbildung“). Dann ist $f^{-1}(B) = \emptyset$ und damit auch $f(f^{-1}(B)) = \emptyset \subsetneq B$.

Ähnlich wie in Aufgabe 1 vom Tutoriumsblatt kann man ein solches Beispiel finden, indem man versucht, die Aussage „ $B \subset f(f^{-1}(B))$ “ zu beweisen. Dazu müssen wir also $y \in B$ als gegeben annehmen; um zu beweisen, daß y auch in $f(f^{-1}(B))$ läge, müßte erst einmal y überhaupt von der Abbildung f getroffen werden – und dafür gibt es im allgemeinen keinen Grund. Wir müssen also zur Konstruktion eines Gegenbeispiels nur die Mengen und die Abbildung so wählen, daß B ein Element besitzt, das nicht von f getroffen wird.

Aufgabe 2.

- a) Die Abbildung f ist **injektiv**, denn aus $f(x_1) = f(x_2)$, also $3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$, folgt sofort $3x_1 = 3x_2$ und damit $x_1 = x_2$. Die Abbildung f ist jedoch **nicht surjektiv**, denn für alle $x \in \mathbb{Z}$ ist $f(x) - 4 = 3x$ eine durch 3 teilbare Zahl. Für die Zahl $y := 5$ beispielsweise ist aber $y - 4 = 1$ *nicht* durch 3 teilbar, also kann es ein $x \in \mathbb{Z}$ geben mit $f(x) = 5$.
- b) Die Abbildung g ist **injektiv** nach genau dem gleichen Argument wie in a). Aber g ist auch **surjektiv**, denn für jedes gegebene $y \in \mathbb{Q}$ ist $x := \frac{1}{3}(y - 4)$ ein Element von \mathbb{Q} mit $g(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}(y - 4) + 4 = (y - 4) + 4 = y$.
- c) Die Abbildung h ist **nicht injektiv**, denn es ist beispielsweise $h(1, 0) = 0 = h(0, 1)$. Aber h ist **surjektiv**, denn für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist beispielsweise $h(1, y) = y$.
- d) Die Abbildung k ist **injektiv**, denn die Beziehung $k(x_1) = k(x_2)$, also $(x_1^2 + 1, (x_1 + 1)^2) = (x_2^2 + 1, (x_2 + 1)^2)$ bedeutet $x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$ sowie $(x_1 + 1)^2 = (x_2 + 1)^2$, also $x_1^2 + 2x_1 + 1 = x_2^2 + 2x_2 + 1$. Abziehen der ersten Gleichung liefert $2x_1 = 2x_2$, woraus $x_1 = x_2$ folgt.

Dagegen ist k **nicht surjektiv**, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 \geq 0$, also ist die erste Koordinate $x^2 + 1$ von $k(x)$ eine Zahl ≥ 1 (und die zweite Koordinate eine Zahl ≥ 0). Beispielsweise gibt es also kein $x \in \mathbb{R}$ mit $k(x) = (-1, 0)$.

Aufgabe 3. Wir bezeichnen Elemente von L mit x, x_1, \dots , Elemente von M mit y, y_1, \dots und Elemente von N mit z, z_1, \dots . (Mathematisch ist eine solche Vereinbarung bedeutungslos, aber sie kann enorm helfen, nicht durcheinanderzukommen – ich empfehle sie für die eigene Arbeit wärmstens!)

- a) Diese Aussage ist **falsch**. Ein Gegenbeispiel findet sich in Aufgabe 3 vom 7. Tutoriumsblatt; ein weiteres ist das folgende: Setze $L = N = \{0\}$ und $M = \mathbb{N}$, also

$$\{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \{0\}.$$

Dabei ist egal, welche Abbildung g genommen wird (für f gibt es ohnehin nur eine einzige Möglichkeit: alles geht auf 0). In jedem Fall ist $f \circ g = \text{id}_{\{0\}}$ injektiv (sogar bijektiv), aber f ist nicht injektiv, da etwa $f(1) = 0 = f(2)$ ist.

- b) Diese Aussage ist **wahr**. Zum Beweis seien $x_1, x_2 \in L$ mit $g(x_1) = g(x_2)$. Da wir nur etwas über $f \circ g$ wissen, liegt es nahe, auf die angenommene Gleichheit die Abbildung f anzuwenden: dann folgt also $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, d.h. $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$. Aber $f \circ g$ ist injektiv, und damit folgt $x_1 = x_2$, was zu zeigen war.
- c) Diese Aussage ist **wahr**. Zum Beweis sei $z \in N$ vorgegeben. Wir wissen, daß die Abbildung $f \circ g : L \rightarrow N$ surjektiv ist; also gibt es ein $x \in L$ mit $z = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Mit $y := g(x)$ ist dann aber $z = f(y)$, d.h. wir haben ein Element von M gefunden, das durch f auf z abgebildet wird. Dies beweist die Surjektivität von f .
- d) Diese Aussage ist **falsch**. Auch hierfür findet sich in Aufgabe 3 vom 7. Tutoriumsblatt ein Gegenbeispiel; unser unter a) angegebenes läßt sich jedoch auch hier dienbar machen: Denn $f \circ g$ ist bijektiv, also auch surjektiv, jedoch ist g nicht surjektiv (da ja nur ein einziges Element von \mathbb{N} getroffen wird).

Aufgabe 4. Eine andere Art, die Definition der Menge X zu formulieren, ist

$$X = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a \leq b \right\}$$

Die Brüche dieser Form $\frac{a}{b}$ werden alle getroffen beispielsweise von einer Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ mit der folgenden Wertetabelle:

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|
| $f(x)$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | ... |

Hier werden also zunächst alle Brüche mit Nenner 1 und Zähler ≤ 1 angesteuert (davon gibt es nur einen), danach alle Brüche mit Nenner 2 und Zähler ≤ 2 , als nächstes diejenigen mit Nenner 3 und Zähler ≤ 3 usw., jeweils der Größe nach sortiert. Nach Konstruktion ist f surjektiv, denn jeder Bruch der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $a \leq b$ taucht an einer bestimmten Stelle in der Wertetabelle auf.

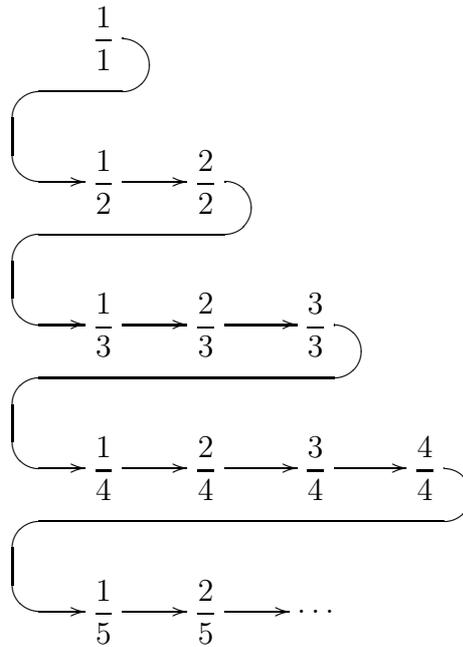
Die Abbildung f formelmäßig anzugeben, ist weitaus schwieriger. Tatsächlich kann man nachweisen (und das Rüstzeug dazu wird uns auch im Prinzip bald zur Verfügung stehen), daß für alle $x \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x \cdot \left[\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2} \right]^{-1} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{8x+1}-3}{2} \right]$$

gilt, wobei $\lceil a \rceil$ die *Aufrundung* von a (also die kleinste ganze Zahl $\geq a$) bezeichnet. Für eine Herleitung dieser Formel oder einen Beweis ihrer Richtigkeit setze ich hiermit eine Maß Bier aus; der Wettbewerb steht allen angemeldeten Student(inn)en, Tutor(inn)en und Korrektor(inn)en der Vorlesung offen und läuft bis zur Klausur.

Zusatzaufgabe. Das Verfahren, das in Aufgabe 4 funktioniert hat, scheitert hier, weil es in der Zielmenge nicht mehr nur *endlich viele* Brüche zu jedem festen Nenner gibt. Es gibt aber dennoch eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$! Einen Weg, sie anzugeben, kann man durch folgende Beobachtung finden: Das

Konstruktionsprinzip der Abbildung f aus Aufgabe 4 lässt sich folgendermaßen graphisch veranschaulichen:



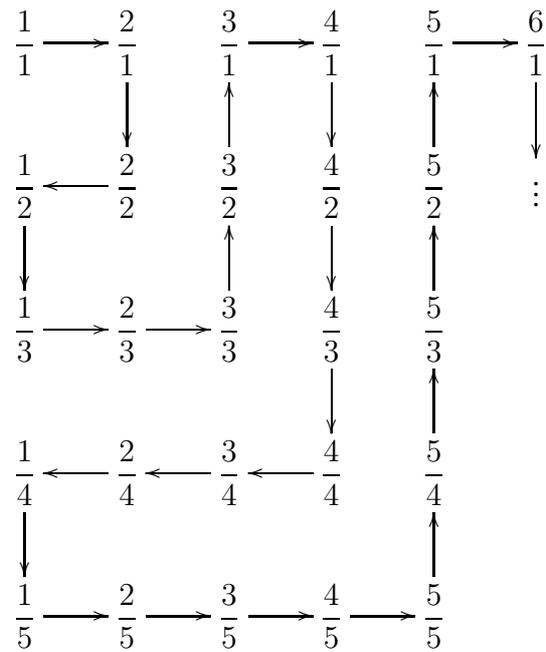
Die Wertetabelle von f entsteht dabei, indem man entlang der Pfeile läuft und die Brüche notiert, an denen man vorbeikommt.

Unsere jetzige Aufgabenstellung läuft darauf hinaus, einen „Pfad“ durch die Tabelle

| | | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{4}{1}$ | $\frac{5}{1}$ | \dots |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | \dots |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | \dots |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | \dots |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{5}$ | \dots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |

zu finden, der an jedem Bruch (mindestens) einmal vorbeikommt. Dafür gibt es tatsächlich viele Möglichkeiten,

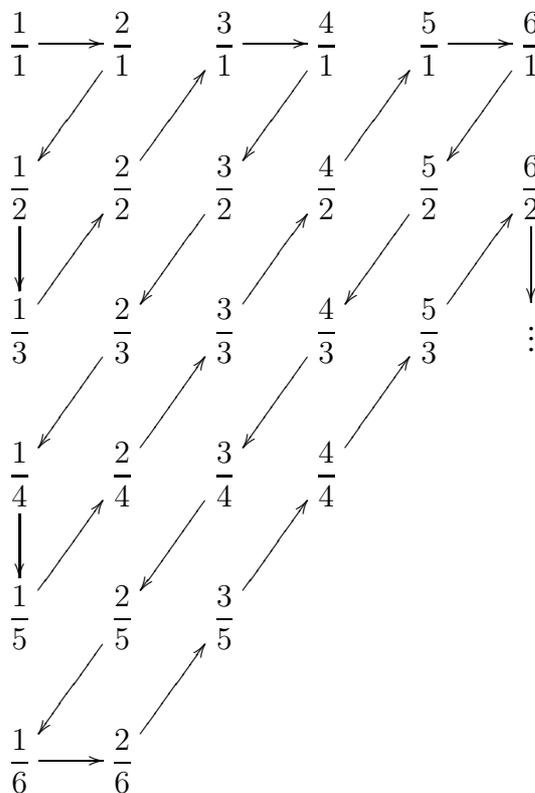
etwa



was zur Wertetabelle

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|
| $f(x)$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{4}{1}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | ... |

führt, oder (dies ist ein berühmter Weg, bekannt als das *Erste Cantorsche Diagonalverfahren*)



mit der Wertetabelle

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|
| $f(x)$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{4}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{4}$ | ... |