Mathematisches Institut der Universität München | Daniel Rost
Wintersemester 2013/14 | Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I – 7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Bilder und Urbilder). Es seien M, N Mengen, $f : M \to N$ eine Abbildung und $B \subset N$ eine Teilmenge.

a) Man zeige, daß $f(f^{-1}(B)) \subset B$ gilt.

b) Man gebe ein Beispiel an, in dem $f(f^{-1}(B)) \subsetneqq B$ gilt.

Aufgabe 2 (Eigenschaften von Abbildungen). Man untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität bzw. Surjektivität:

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 3x + 4$

b) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 3x + 4$

c) $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto xy$

d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ x \mapsto (x^2 + 1, (x + 1)^2)$

Aufgabe 3 (Kompositionen von Abbildungen). Es seien L, M, N Mengen sowie $f : M \to N$ und $g : L \to M$ Abbildungen. Man beweise oder widerlege:

a) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist auch f injektiv.

b) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist auch g injektiv.

c) Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.

d) Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

Aufgabe 4 (Eine merkwürdige Surjektion). Es sei $X := \mathbb{Q} \cap]0, 1] = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, 0 < x \leq 1\}$. Man gebe eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to X$ an (mit Begründung).

Diese Abbildung muß nicht unbedingt „formelmäßig“ durch einen geschlossenen Term angegeben werden – möglich ist beispielsweise auch die Angabe einer Wertetabelle; in diesem Fall muß das Konstruktionsprinzip aber klar erkennbar werden!

Zusatzaufgabe (ergibt 4 Extrapunkte). Gibt es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$? (Mit Begründung.)

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 13. Dezember 2013, 12:15 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibiothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!