Mathematisches Institut der Universität München | Daniel Rost
Wintersemester 2013/14 | Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Wir zerlegen die Doppelungleichung in zwei einzelne Ungleichungen, deren Lösungsmengen wir dann schneiden.

- Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} < \frac{2x-1}{3-2x} \quad &\iff \quad 0 < \frac{2x-1}{3-2x} - \frac{1}{3} \\
&\iff \quad 0 < \frac{6x-3}{9-6x} - \frac{3-2x}{9-6x} \\
&\iff \quad 0 < \frac{6x-3-3+2x}{9-6x} \\
&\iff \quad 0 < \frac{8x-6}{9-6x} \\
&\iff \quad 0 < \frac{4x-3}{3-2x}
\end{aligned}$$

Der Zähler $4x-3$ und der Nenner $3-2x$ wechseln an ihren Nullstellen $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{3}{2}$ ihr Vorzeichen, so daß wir die folgende Vorzeichentabelle anlegen:

		$\frac{3}{4}$		$\frac{3}{2}$	
$4x-3$	$-$		$+$		$+$
$3-2x$	$+$		$+$		$-$
$\frac{4x-3}{3-2x}$	$-$		$+$		$-$

Also gilt

$$\frac{1}{3} < \frac{2x-1}{3-2x} \quad \iff \quad 0 < \frac{4x-3}{3-2x} \quad \iff \quad x \in \left]\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right[.$$

- Ebenso gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2} \quad &\iff \quad \frac{2x-1}{3-2x} - \frac{1}{2} < 0 \\
&\iff \quad \frac{4x-2}{6-4x} - \frac{3-2x}{6-4x} < 0 \\
&\iff \quad \frac{4x-2-3+2x}{6-4x} < 0 \\
&\iff \quad \frac{6x-5}{6-4x} < 0 \\
&\iff \quad \frac{6x-5}{3-2x} < 0.
\end{aligned}$$

Der Zähler $6x-5$ und der Nenner $3x-2$ wechseln an ihren Nullstellen $\frac{5}{6}$ bzw. $\frac{3}{2}$ ihr Vorzeichen; die Vorzeichentabelle lautet also

		$\frac{5}{6}$		$\frac{3}{2}$	
$6x-5$	$-$		$+$		$+$
$3-2x$	$+$		$+$		$-$
$\dfrac{6x-5}{3-2x}$	$-$		$+$		$-$

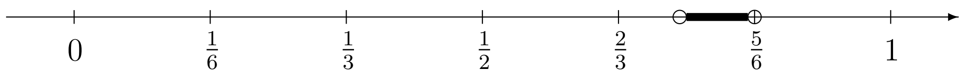
Damit gilt

$$\frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2} \quad\iff\quad \frac{6x-5}{3-2x} < 0 \quad\iff\quad x \in \left]-\infty, \frac{5}{6}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[.$$

Setzen wir nun die Lösungen beider Ungleichungen zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} x \in L_1 \quad &\iff \quad \frac{1}{3} < \frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2} \\ &\iff \quad x \in \left]\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right[\cap \left(\left]-\infty, \frac{5}{6}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[\right) \\ &\iff \quad x \in \left]\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right[, \end{aligned}$$

also $L_1 = \left]\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right[$.



b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} x \in L_2 \quad &\iff \quad \left|3x^2 - 8x - 7\right| \leq 4 \\ &\iff \quad -4 \leq 3x^2 - 8x - 7 \leq 4 \end{aligned}$$

(für die zweite Äquivalenz vgl. Aufgabe 2 d) vom 6. Tutoriumsblatt). Wieder behandeln wir beide Ungleichungen dieser Ungleichungskette einzeln:

- Für die erste Ungleichung rechnen wir

$$\begin{aligned} -4 \leq 3x^2 - 8x - 7 \quad &\iff \quad 0 \leq 3x^2 - 8x - 3 \\ &\iff \quad 0 \leq x^2 - \frac{8}{3}x - 1 \\ &\iff \quad 0 \leq (x-3) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

(die Faktorisierung im letzten Schritt erfolgt dabei anhand des Satzes von Vieta, also Aufgabe 2 b) vom 4. Tutoriumsblatt). Die Vorzeichentabelle

		$-\frac{1}{3}$		3	
$x-3$	$-$		$-$		$+$
$x+\frac{1}{3}$	$-$		$+$		$+$
$(x-3)\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)$	$+$		$-$		$+$

zeigt nun

$$\begin{aligned} -4 \leq 3x^2 - 8x - 7 \quad &\iff \quad 0 \leq (x-3) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \\ &\iff \quad x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [3, \infty[\,. \end{aligned}$$

- Für die zweite Ungleichung lautet die gleiche Rechnung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x - 7 \leq 4 \quad &\iff \quad 3x^2 - 8x - 11 \leq 0 \\ &\iff \quad 0 \leq x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{11}{3} \leq 0 \\ &\iff \quad 0 \leq (x+1) \cdot \left(x - \frac{11}{3}\right). \end{aligned}$$

Die Vorzeichentabelle

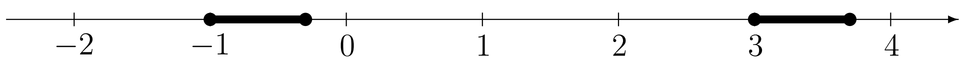
		-1		$\frac{11}{3}$	
$x+1$	$-$		$+$		$+$
$x - \frac{11}{3}$	$-$		$-$		$+$
$(x+1) \cdot \left(x - \frac{11}{3}\right)$	$+$		$-$		$+$

liefert dann

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x - 7 \leq 4 \quad &\iff \quad 0 \leq (x+1) \cdot \left(x - \frac{11}{3}\right) \\ &\iff \quad x \in \left[-1, \frac{11}{3}\right], \end{aligned}$$

Zusammensetzen beider Lösungen ergibt

$$L_2 = \left(\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [3, \infty[\right) \cap \left[-1, \frac{11}{3}\right] = \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[3, \frac{11}{3}\right].$$



Aufgabe 2.

a) Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Ist $a \geq b$, so ist $\max\{a, b\} = a$ und $|a - b| = a - b$, also

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = \frac{1}{2} \cdot 2a = a = \max\{a, b\}\,.$$

- Ist $a \leq b$, so ist $\max\{a, b\} = b$ und $|a - b| = b - a$, also

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + b - a) = \frac{1}{2} \cdot 2b = b = \max\{a, b\}\,.$$

Die Behauptung stimmt also in beiden Fällen.

b) Diese Aussage beweist man entweder genauso wie diejenige in a), oder man führt sie auf diese zurück. Das geht, indem man (Trick!) verwendet, daß $\min\{a,b\} = -\max\{-a,-b\}$ ist: damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\min\{a,b\} &= -\max\{-a,-b\} \\ &\overset{\text{a)}}{=} -\frac{1}{2}(-a+(-b)+|-a-(-b)|) \\ &= \frac{1}{2}(a+b-|b-a|) \\ &= \frac{1}{2}(a+b-|a-b|),\end{aligned}$$

wie behauptet.

c) Dies folgt direkt aus a) und b):

$$\begin{aligned}\max\{a,b\}-\min\{a,b\} &= \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) - \frac{1}{2}(a+b-|a-b|) \\ &= \frac{1}{2}(|a-b|+|a-b|) \\ &= |a-b|\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3.

a) Wie üblich, zeigen wir zwei Inklusionen:

- $\subset$. Es sei $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Dann gibt es ein $x \in A_1 \cup A_2$ mit $f(x) = y$. Dann ist also $x \in A_1$ oder $x \in A_2$; im ersten Fall folgt $y \in f(A_1)$, im zweiten $y \in f(A_2)$, und insgesamt folgt $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
- $\supset$. Es sei $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Dann gilt $y \in f(A_1)$ oder $y \in f(A_2)$. Im ersten Fall gibt es ein $x \in A_1$ mit $y = f(x)$, im zweiten Fall ein $x \in A_2$ mit $y = f(x)$. In beiden Fällen haben wir ein $x \in A_1 \cup A_2$ gefunden mit $y = f(x)$, also ist $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

b) Es sei $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Dann gibt es ein $x \in A_1 \cap A_2$ mit $y = f(x)$. Wegen $x \in A_1$ folgt dann $y \in f(A_1)$, und wegen $x \in A_2$ folgt $y \in f(A_2)$. Insgesamt ist also $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Die bewiesene Inklusion kann aber tatsächlich *echt* sein. Nimm beispielsweise die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alles auf 0 abbildet, also $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $A_1 = \{1\}$ und $A_2 = \{2\}$ beispielsweise gilt dann $f(A_1) = \{0\} = f(A_2)$, also $f(A_1) \cap f(A_2) = \{0\}$, aber $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und damit $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$.

Wie im Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 3, Aufgabe 2 b) (iii), erläutert, kann man ein solches Gegenbeispiel beispielsweise dadurch konstruieren, daß man versucht, die umgekehrte Inklusion zu beweisen, und sich klarmacht, woran man scheitert.

In diesem Fall könnte das so aussehen: Wir versuchen, die Behauptung „$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$" zu beweisen. Sei also $y \in N$ mit der Eigenschaft $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ vorgegeben. Wegen $y \in f(A_1)$ gibt es dann ein $x_1 \in A_1$ mit $y = f(x_1)$, und wegen $y \in f(A_2)$ gibt es auch ein $x_2 \in A_2$ mit $y = f(x_2)$. Weder von x_1 noch von x_2 weiß man aber, ob sie vielleicht in A_1 *und* A_2 liegen – das wüßte man nur, wenn man beispielsweise wüßte, daß $x_1 = x_2$ ist, aber dafür gibt es im allgemeinen keinen Grund; das bräuchten wir aber, um zu zeigen, daß y das Bild eines Elements von $A_1 \cap A_2$ ist. Hieran scheitert also der Beweis, und entsprechend ist unser obiges Gegenbeispiel so konstruiert, daß A_1 und A_2 jeweils ein Element enthalten, das nicht in der anderen Menge liegt, die aber beide auf das gleiche Bild (hier 0) abgebildet werden.

Aufgabe 4.

a) Sei $y \in \mathbb{R}$ vorgegeben; zur Bestimmung von $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}$ müssen wir die Gleichung

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

also

$$ax^2 + bx + c - y = 0$$

nach x auflösen. Hier gibt es nun mehrere Fälle:

(i) Ist $a \neq 0$, so liegt eine quadratische Gleichung mit Diskriminante $D = b^2 - 4a(c-y) = b^2 - 4ac + 4ay$ vor. Ihre Lösbarkeit hängt vom Vorzeichen von D ab; zu dessen Bestimmung ist es vorteilhaft, auch noch nach dem Vorzeichen von a zu unterscheiden:

- Ist $a > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} D \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad b^2 - 4ac + 4ay \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4ay \geq 4ac - b^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad y \geq c - \frac{b^2}{4a}, \end{aligned}$$

und eine ähnliche Rechnung zeigt, daß genau dann $D = 0$ ist, wenn $y = c - \dfrac{b^2}{4a}$ ist. Die Lösung der quadratischen Gleichung $y = f(x)$ ist nun

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a},$$

und damit ergibt sich

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } y < c - \dfrac{b^2}{4a}, \\ \left\{ \dfrac{-b}{2a} \right\} & \text{falls } y = c - \dfrac{b^2}{4a}, \\ \left\{ \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} \right\} & \text{falls } y > c - \dfrac{b^2}{4a}. \end{cases}$$

- Ist $a > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} D \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad b^2 - 4ac + 4ay \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4ay \geq 4ac - b^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad y \leq c - \frac{b^2}{4a}, \end{aligned}$$

und wieder ist genau dann $D = 0$, wenn $y = c - \dfrac{b^2}{4a}$ ist. Die Lösung der quadratischen Gleichung $y = f(x)$ ist nun

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a},$$

und damit ergibt sich

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } y > c - \dfrac{b^2}{4a}, \\ \left\{ \dfrac{-b}{2a} \right\} & \text{falls } y = c - \dfrac{b^2}{4a}, \\ \left\{ \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} \right\} & \text{falls } y < c - \dfrac{b^2}{4a}. \end{cases}$$

(ii) Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, so handelt es sich um eine lineare Gleichung $bx + c - y = 0$. Diese ist wegen $b \neq 0$ stets eindeutig nach x auflösbar, und zwar gilt

$$x = \frac{y - c}{b}$$

und damit

$$f^{-1}(\{y\}) = \left\{ \frac{y-c}{b} \right\} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

(iii) Ist $a = b = 0$, so liegt die Gleichung $c - y = 0$ vor. Diese ist unlösbar für $y \neq c$ und stets erfüllt für $y = c$, so daß gilt:

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } y \neq c, \\ \mathbb{R} & \text{falls } y = c. \end{cases}$$

b) Eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in der Wertemenge $f(\mathbb{R})$, wenn es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = y$, wenn also $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ ist. Wir müssen also nur in den oben diskutierten Fällen notieren, wann die Urbildmenge von $\{y\}$ nicht leer ist:

(i) Ist $a > 0$, so ist $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $y \geq c - \frac{b^2}{4a}$ ist. Also ist $f(\mathbb{R}) = \left[c - \frac{b^2}{4a}, \infty\right[$.

(ii) Ist $a < 0$, so ist $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $y \leq c - \frac{b^2}{4a}$ ist. Also ist $f(\mathbb{R}) = \left]-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\right]$.

(iii) Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, so sind $f^{-1}(\{y\})$ *immer* nichtleer, also folgt $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(iv) Ist $a = b = 0$, so ist $f^{-1}(\{y\})$ nur für $y = c$ nichtleer, so daß $f(\mathbb{R}) = \{c\}$ gilt.