

# Grundlagen der Mathematik I

## Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

### Aufgabe 1.

- a) Die **Kommutativität**, die **Existenz neutraler Elemente** und die **Existenz inverser Elemente zu jedem Element** kann man für Addition und Multiplikation direkt an den Verknüpfungstabellen ablesen, wie es im Lösungsvorschlag zum 5. Tutoriumsblatt, Aufgabe 1, beschrieben ist. (Kommutativität zeigt sich an der Spiegelsymmetrie der Tabelle, die Existenz eines neutralen Elementes an der Existenz einer Zeile oder Spalte, die identisch zur Beschriftungszeile oder -spalte ist, die Existenz von inversen Elementen daran, daß in jeder Zeile oder Spalte – außer, im Falle der Multiplikationstafel, der zu  $\bar{0}$  gehören – irgendwo das neutrale Element auftaucht.)

Die übrigen Eigenschaften sind, wie immer, mühsamer:

- Für die **Assoziativität der Addition** ist für alle  $a, b, c \in K$  die Gleichung

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

zu überprüfen. Da  $K$  drei Elemente hat, sind dies  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  zu überprüfende Gleichungen. Genau wie im Lösungsvorschlag zum 5. Tutoriumsblatt, Aufgabe 1, erklärt, sind die Fälle, daß eine der Variablen den Wert  $\bar{0}$  hat oder alle drei identisch sind, ohne Blick in die Verknüpfungstabelle immer unproblematisch. Anders als bei jener Aufgabe bleiben nun aber immer noch sechs zu überprüfende Gleichungen übrig, nämlich:

$$\begin{array}{ll} \bar{2} + (\bar{2} + \bar{1}) \stackrel{?}{=} (\bar{2} + \bar{2}) + \bar{1} & \bar{1} + (\bar{2} + \bar{2}) \stackrel{?}{=} (\bar{1} + \bar{2}) + \bar{2} \\ \bar{2} + (\bar{1} + \bar{1}) \stackrel{?}{=} (\bar{2} + \bar{1}) + \bar{1} & \bar{1} + (\bar{1} + \bar{2}) \stackrel{?}{=} (\bar{1} + \bar{1}) + \bar{2} \\ \bar{1} + (\bar{2} + \bar{1}) \stackrel{?}{=} (\bar{1} + \bar{2}) + \bar{2} & \\ \bar{2} + (\bar{1} + \bar{2}) \stackrel{?}{=} (\bar{2} + \bar{1}) + \bar{2}. & \end{array}$$

Ein letzter Vereinfachungsschritt besteht nun noch in der Beobachtung, daß aufgrund der (schon bewiesenen) Kommutativität der Addition Gleichungen, die in der gleichen Zeile abgedruckt sind, zueinander äquivalent sind.

Es sind also nur die vier untereinander stehenden Gleichungen der linken Spalte zu überprüfen, und hier nun ist endlich die Verknüpfungstabelle zu Rate zu ziehen: Sie zeigt, daß alle vier Gleichungen tatsächlich richtig sind. Für die beiden unteren Gleichungen erkennt man das daran, daß  $\bar{1} + \bar{2} = \bar{0}$  ist; für die ersten beiden Gleichungen muß man den gemeinsamen Wert beider Seiten ( $\bar{2}$  für die erste und  $\bar{1}$  für die zweite Gleichung) ermitteln.

- Für die **Assoziativität der Multiplikation** ist für alle  $a, b, c \in K$  die Gleichung

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

zu überprüfen. Genau wie bei der Assoziativität der Addition sind die Fälle klar, in denen eine der Variablen den Wert  $\bar{1}$  hat oder alle drei Variablen den gleichen Wert haben. Da außerdem an der Multiplikationstabelle abzulesen ist, daß  $\bar{0} \cdot a = \bar{0}$  für alle  $a \in K$  ist, erledigen sich auch alle Fälle, in denen eine der Variablen den Wert  $\bar{0}$  hat, automatisch. Damit sind aber alle Fälle abgedeckt: Denn wenn keine der Variablen den Wert  $\bar{0}$  oder  $\bar{1}$  hat, so ist  $a = b = c = \bar{2}$ , und auch diesen Fall haben wir bereits erledigt.

- Für die **Distributivität** ist für alle  $a, b, c \in K$  die Gültigkeit der Gleichung

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

zu überprüfen. Von diesen 27 Gleichungen können wiederum die meisten durch allgemeine Überlegungen erledigt werden: Ist  $a = \bar{1}$ , so ist die Gleichung stets erfüllt, da beide Seiten den Wert  $b + c$  ergeben. Hat eine der Variablen den Wert  $\bar{0}$ , so ist sie ebenfalls erfüllt nach dem gleichen Argument wie auf dem Tutoriumsblatt. Es bleibt also für  $a$  nur noch der Wert  $\bar{2}$  übrig, und für  $\bar{b}$  und  $\bar{c}$  jeweils die Werte  $\bar{1}$  oder  $\bar{2}$ . Es sind also nur noch vier Gleichungen zu überprüfen, nämlich:

$$\begin{aligned} \bar{2} \cdot (\bar{1} + \bar{1}) &\stackrel{?}{=} \bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{2} \cdot \bar{1} \\ \bar{2} \cdot (\bar{2} + \bar{1}) &\stackrel{?}{=} \bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{2} \cdot \bar{1} & \bar{2} \cdot (\bar{1} + \bar{2}) &\stackrel{?}{=} \bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{2} \cdot \bar{2} \\ \bar{2} \cdot (\bar{2} + \bar{2}) &\stackrel{?}{=} \bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{2} \cdot \bar{2} \end{aligned}$$

Wieder sind die beiden in einer Zeile geschriebenen Gleichungen aufgrund der Kommutativität der Addition äquivalent; die Gültigkeit der drei verbliebenen Gleichungen überprüft man anhand der Verknüpfungstabellen (die gemeinsamen Werte beider Seiten sind der Reihe nach  $\bar{1}$ ,  $\bar{0}$ ,  $\bar{2}$ ).

Uff. Die Mühsamkeit dieses Verfahrens (und das unklare Zustandekommen der Verknüpfungstabellen) sind Grund genug, nach besseren Konstruktionsmöglichkeiten für endliche Körper zu suchen. Wir werden im Laufe der Vorlesung darauf zurückkommen.

- b)  $(R, +, \cdot)$  ist kein Körper, da das Distributivgesetz nicht erfüllt ist; beispielsweise ist

$$A \cdot (B + B) = A \cdot A = B,$$

aber

$$A \cdot B + A \cdot B = D + D = A.$$

(Interessanterweise sind jedoch alle anderen Axiome eines Körpers erfüllt: Addition und Multiplikation sind assoziativ und kommutativ,  $C$  ist Nullelement und  $D$  ist Einselement, in jeder Zeile/Spalte der Additionstabelle taucht einmal  $C$  auf, und in jeder Zeile/Spalte der Multiplikationstabelle außer der zu  $C$  gehörigen taucht einmal  $D$  auf.)

**Aufgabe 2.** Wir formen die Ausgangsgleichung so um, wie im Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 vom 5. Tutoriumsblatt erläutert:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-5} = 7 && \text{(Wurzeln trennen)} \\ \iff &\sqrt{x+2} = 7 - \sqrt{3x-5} && \text{(quadrieren)} \\ (!) \implies &x+2 = (7 - \sqrt{3x-5})^2 && \text{(binomische Formel)} \\ \iff &x+2 = 49 + 3x - 5 - 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{3x-5} \\ \iff &x+2 = 3x + 44 - 14 \cdot \sqrt{3x-5} && \text{(Wurzel isolieren)} \\ \iff &14 \cdot \sqrt{3x-5} = 42 + 2x \\ \iff &7\sqrt{3x-5} = 21 + x && \text{(erneut quadrieren)} \\ (!) \implies &49 \cdot (3x-5) = (21+x)^2 \\ \iff &147x - 245 = 441 + x^2 + 42x \\ \iff &x^2 - 105x + 686 = 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind  $x = 7$  und  $x = 98$ . Beide liegen im Intervall  $[\frac{5}{3}, \infty[$ , sind also prinzipiell zulässig. Setzen wir sie in die Ausgangsgleichung ein, erhalten wir für  $x = 7$

$$\sqrt{7+2} + \sqrt{3 \cdot 7 - 5} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7,$$

also ist  $x = 7$  eine Lösung; für  $x = 98$  erhalten wir dagegen

$$\sqrt{98+2} + \sqrt{3 \cdot 98 - 5} = \sqrt{100} + \sqrt{289} = 10 + 17 = 27 \neq 7,$$

also ist  $x = 98$  keine Lösung der Ausgangsgleichung. Die Lösungsmenge ist also  $L = \{7\}$ .

### Aufgabe 3.

- a) Nach Definition ist  $K$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Da sich jede Zahl  $a \in \mathbb{Q}$  schreiben läßt als  $a = a + 0 \cdot \sqrt{2} \in K$ , gilt auch  $\mathbb{Q} \subset K$ . Da auf dem Übungsblatt schon gezeigt wurde, daß Summen, Produkte und Negative von Elementen von  $K$  wieder in  $K$  liegen, liefert die „gewöhnliche“ Addition und Multiplikation sinnvolle Verknüpfungen auf der Menge  $K$ .

Wegen  $0, 1 \in \mathbb{Q} \in K$  sind neutrale Elemente für beide Verknüpfungen in  $K$  enthalten, und da  $\mathbb{R}$  ein Körper ist, gelten in  $K$  all diejenigen Körperaxiome (weil sie in  $\mathbb{R}$  gelten), die nicht die Existenz von Objekten fordern: Die Assoziativität von  $+$  beispielsweise gilt in  $K$ , weil sie in  $\mathbb{R}$  gilt; die Existenz von multiplikativen Inversen dagegen ist nicht klar: Ist  $0 \neq a \in K$ , so gibt es zwar in  $\mathbb{R}$  ein Element  $a^{-1}$ , aber von diesem ist nicht klar, ob es wieder in  $K$  liegt.

Automatisch übertragen sich also von  $\mathbb{R}$  auf  $K$  die Assoziativität und Kommutativität beider Verknüpfungen sowie die Distributivität. Die Existenz neutraler Elemente haben wir schon festgestellt, ebenso die von inversen Elementen bezüglich  $+$ .

- b) Die angegebene Formel ergibt sich aus der dritten binomischen Formel:

$$(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - (b\sqrt{2})^2 = a^2 - 2b^2.$$

Der Knackpunkt ist nun, daß  $a^2 - 2b^2$  stets in  $\mathbb{Q}$  liegt (dies folgt sofort aus  $a, b \in \mathbb{Q}$ ), und sofern  $a + b\sqrt{2} \neq 0$  ist, ist auch  $a^2 - 2b^2 \neq 0$ : Denn andernfalls wäre  $a^2 = 2b^2$ ; da nicht  $a$  und  $b$  beide null sind (sonst wäre  $a + b\sqrt{2} = 0$ ), müssen sie aufgrund dieser Gleichung beide von Null verschieden sein. Dann folgt aber  $(\frac{a}{b})^2 = 2$ , also wäre  $\frac{a}{b}$  eine rationale Zahl mit Quadrat 2, und eine solche gibt es laut Vorlesung nicht.

Damit kann man aber eine Formel für multiplikative Inverse angeben: Für  $0 \neq a + b\sqrt{2} \in K$  gilt

$$1 = \frac{1}{a^2 - 2b^2} (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2}) \left( \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2} \right),$$

also

$$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2} \right),$$

und dies ist ein Element von  $K$ .

- c) In a) haben wir alle Körperaxiome nachgewiesen bis auf die Existenz multiplikativer Inverser; diese folgte in b), und damit ist  $K$  ein Körper.

#### Aufgabe 4.

- a) Die Ungleichungskette (die rechte Hälfte derer, die wir beweisen wollen)

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq b^2.$$

folgt durch Quadrieren aus der Ungleichungskette

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b,$$

in der die erste Ungleichung die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel ist (Aufgabe 1 c) vom 2. Tutoriumsblatt) und die zweite („der Durchschnitt liegt unter dem größeren Wert“) in Aufgabe 4 b) vom 5. Tutoriumsblatt gezeigt wurde.<sup>1</sup>

Bilden wir nun von der schon bewiesenen Ungleichungskette die Kehrwerte, so erhalten wir

$$\frac{1}{b^2} \leq \left(\frac{2}{a+b}\right)^2 \leq \frac{1}{ab}.$$

Multiplizieren wir nun alles mit  $(ab)^2$  (dies ist ja eine positive Zahl!), so folgt

$$a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab,$$

und dies ist genau die fehlende Hälfte der behaupteten Ungleichungskette.

- b) Diese Ungleichung ergibt sich durch folgende Umformungskette aus der Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$\begin{aligned} & \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \\ \implies & \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \leq a+b \\ \implies & a+b+2\sqrt{ab} \leq 2(a+b) \quad (\text{binomische Formel}) \\ \implies & (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq 2(a+b) \\ \stackrel{(*)}{\implies} & \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a+b} \\ \implies & \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a+b} \\ \implies & \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a+b} \\ \implies & \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}} \end{aligned}$$

Dabei wurde in (\*) verwendet, daß für  $x, y > 0$  aus  $x \leq y$  bereits  $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$  folgt. Dies beweist man durch Kontraposition, denn es ist schon bekannt, daß umgekehrt aus  $\sqrt{x} > \sqrt{y}$  durch Quadrieren folgt  $x > y$ .

---

<sup>1</sup>Beim Quadrieren einer Ungleichung verwenden wir die Rechenregel  $0 \leq a \leq b \implies a^2 \leq b^2$ , die sich aus der Ungleichungskette  $a^2 = a \cdot a \leq a \cdot b \leq b \cdot b = b^2$  ergibt.