Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I – 5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Endliche Körper).

a) Auf der Menge $K = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ wird eine Addition $+$ sowie eine Multiplikation $\cdot$ definiert durch Angabe der Verknüpfungstabellen

$$\begin{array}{c|ccc} + & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \end{array}$$

definiert. Man zeige, daß $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit Nullelement $\overline{0}$ und Einselement $\overline{1}$ ist.

(Zum Erwerb der Punkte genügt es, wenn von den drei Eigenschaften „Assoziativität von $+$“, „Assoziativität von $\cdot$“ und „Distributivität“ nur *eine* bewiesen wird.)

b) Auf der Menge $R = \{A, B, C, D\}$ wird eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ über die Verknüpfungstabellen

$$\begin{array}{c|cccc} + & A & B & C & D \\ \hline A & C & D & A & B \\ B & D & A & B & C \\ C & A & B & C & D \\ D & B & C & D & A \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cccc} \cdot & A & B & C & D \\ \hline A & B & D & C & A \\ B & D & A & C & B \\ C & C & C & C & C \\ D & A & B & C & D \end{array}$$

definiert. Ist $(R, +, \cdot)$ ein Körper?

Aufgabe 2 (Lösen von Gleichungen). Man bestimme die Elemente der Menge

$$L = \left\{ x \in \left[\frac{5}{3}, \infty\right[\;\middle|\; \sqrt{x+2} + \sqrt{3x-5} = 7 \right\}.$$

Dabei dürfen Schulkenntnisse über die Definition von und das Rechnen mit Wurzeln verwendet werden.

Aufgabe 3 (Ein weiterer Körper II). Für den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ betrachte man die Teilmenge $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Auf dem 5. Tutoriumsblatt, Aufgabe 3, wurde schon gezeigt, daß für $x, y \in K$ auch $x + y$, $x \cdot y$ sowie $-x$ in K liegen.

a) Man zeige $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$ und überlege, welche Körperaxiome von $\mathbb{R}$ sich auf K übertragen.

b) Man bestätige
$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = a^2 - 2b^2$$
für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ und zeige damit, daß für alle $x \in K \setminus \{0\}$ auch $\frac{1}{x}$ in K liegt.

c) Man begründe, daß $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (Ungleichungen).

a) Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq b$:

$$a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq b^2.$$

b) Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}}.$$

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 29. November 2013, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibiothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!