Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Wir zeigen, daß jede der Aussage (i), (ii), (iii) äquivalent ist zu (iv). Daß (iv) jede der anderen Aussagen impliziert, ist offensichtlich (ist M eine Teilmenge von N, so ist $M \cap N = M$, $M \cup N = N$ und $M \setminus N = \emptyset$).

(i) $\Longrightarrow$ (iv). Es ist $M = M \cap N \subset N$ (denn nach Definition der Schnittmenge gilt stets $A \cap B \subset A$ und $A \cap B \subset B$).

(ii) $\Longrightarrow$ (iv). Es ist $M \subset M \cup N = N$ (denn nach Definition der Vereinigungsmenge gilt stets $A \subset A \cup B$ und $B \subset A \cup B$).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Nach Definition ist $M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}$. Ist diese Menge leer, so ist die Aussage $x \notin N$ für alle $x \in M$ falsch, also ist ihre Negation $x \in N$ für alle $x \in M$ wahr – und das bedeutet $M \subset N$.

Selbstverständlich wären auch andere Beweisrichtungen möglich, etwa (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i). Man beachte, daß dies ebenfalls die Äquivalenz aller vier Aussagen zeigen würde, aber nur den Beweis von vier Implikationen erfordert, während wir uns um sechs Richtungen kümmern mußten (von denen wir drei für offensichtlich erklärt haben). Dieser Ansatz ist also häufig effizienter; dem steht entgegen, daß beispielsweise der Nachweis von (i) $\Longrightarrow$ (ii) aufwendiger ist als der von (i) $\Longrightarrow$ (iv) oder (ii) $\Longrightarrow$ (iv).

b) $M \subsetneqq N$ bedeutet nach Definition $(M \subset N) \wedge (M \neq N)$, was äquivalent ist zu $(M \subset N) \wedge (N \not\subset M)$. Aber in a) haben wir gesehen, daß $M \subset N$ äquivalent ist zu $M \setminus N = \emptyset$, und entsprechend ist $N \subset M$ äquivalent $N \setminus N = \emptyset$. Also gilt

$$M \subsetneqq N \iff (M \subset N) \wedge (N \not\subset M) \iff (M \setminus N = \emptyset) \wedge (N \setminus M \neq \emptyset),$$

und die letzte Aussage hat die geforderte Form.

Aufgabe 2.

a) Es ist $A \,\Delta\, B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$, also kann man

$$P(x) : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

wählen.

b) (i) Diese Aussage wurde schon auf dem 3. Tutoriumsblatt (Aufgabe 1) gezeigt, ein Lösungsvorschlag findet sich in der entsprechenden Lösung.

(ii) Nach den Distributivgesetzen für $\cap$ und $\cup$ ist

$$\begin{aligned}(A \,\Delta\, B) \cap C &= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap C = ((A \setminus B) \cap C) \cup ((B \setminus A) \cap C) \\ &\overset{(*)}{=} ((A \cap C) \setminus (B \cap C)) \cup ((B \cap C) \setminus (A \cap C)) \\ &= (A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C).\end{aligned}$$

Im Schritt (*) haben wir dabei verwendet, daß für Mengen X, Y, Z stets gilt

$$(X \setminus Y) \cap Z = (X \cap Z) \setminus (Y \cap Z).$$

Die Gültigkeit dieser Rechenregel kann man beispielsweise so einsehen:
„$\subset$“.Ist $a \in (X \setminus Y) \cap Z$, so gilt $a \in X$ und $a \in Z$, also $a \in X \cap Z$, aber $a \notin Y$ und damit auch $a \notin Y \cap Z$, insgesamt also $a \in (X \cap Z) \setminus (Y \cap Z)$.
„$\supset$“. Ist $a \in (X \cap Z) \setminus (Y \cap Z)$, so ist $a \in X \cap Z$, aber $a \notin Y \cap Z$. Da $a \in Z$ ist, muß damit $a \notin Y$ sein, und daraus folgt $a \in (X \setminus Y) \cap Z$.

(iii) Es sei $x \in (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Ist $x \notin A$, so folgt $x \in C$ wegen $x \in A \triangle C$. Da aber auch $x \notin A \cap B$ gilt, ist dann $x \in (A \cap B) \triangle C$.
2. Ist $x \in A$, so folgt $x \notin C$ wegen $x \in A \triangle C$. Wegen $x \in B \triangle C$ folgt dann aber $x \in B$, also $x \in A \cap B$, und wegen $x \notin C$ gilt auch $x \in (A \cap B) \triangle C$.

Die umgekehrte Inklusion

$$(A \cap B) \triangle C \subset (A \triangle C) \cap (B \triangle C) \tag{1}$$

ist aber im allgemeinen falsch. Das sieht man etwa am folgenden Beispiel: Sei $A = \{1\}$, $B = \emptyset$, $C = \{1\}$. Wegen $A \cap B = \emptyset$ ist dann einerseits

$$(A \cap B) \triangle C = \emptyset \triangle C = C = \{1\},$$

andererseits aber wegen $A \triangle C = \emptyset$ und $B \triangle C = C = \{1\}$

$$(A \triangle C) \cap (B \triangle C) = \emptyset \cap \{1\} = \emptyset.$$

Wie kommt man auf ein solches Gegenbeispiel? Entweder durch Herumprobieren, oder durch Bildermalen, bis man das Problem versteht, oder – und das ist ein sehr lehrreicher Weg –: Man versucht, die Aussage (1) zu beweisen, und paßt auf, an welcher Stelle man nicht weiterkommt. So kann man zwar nicht beweisen, *daß* die Aussage falsch ist, aber man erhält häufig einen Hinweis, wie ein Gegenbeispiel aussehen muß.
Sei also $x \in (A \cap B) \triangle C$. Wir wollen versuchen zu zeigen, daß $x \in (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$ gilt; wieder gibt es zwei Fälle:

1. Ist $x \in A \cap B$, so folgt $x \notin C$. Dann ist $x \in A \triangle C$ und auch $x \in B \triangle C$, also insgesamt $x \in (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$. Dieser Fall geht also problemlos durch.
2. Ist $x \in C$, so folgt $x \notin A \cap B$. Um nachzuweisen, daß $x \in (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$ ist, müssen wir also nachweisen, daß $x \in A \triangle C$ *und* $x \in A \triangle C$ gilt, und wegen $x \in C$ bedeutet dies, daß $x \notin A$ *und* $x \notin B$ gelten muß. Wir wissen aber nur $x \notin A \cap B$, und das bedeutet $x \notin A$ *oder* $x \notin B$. Genau das ist der Knackpunkt: Aus $x \notin A \cap B$ können wir nicht folgern, daß $x \notin A \wedge x \notin B$ gilt.

Um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, müssen wir also dafür sorgen, daß die Menge C ein Element enthält, das zwar nicht in $A \cap B$ enthalten ist, aber doch in *einer* der Mengen A, B liegt. Genau so ist unser obiges Beispiel entstanden: Die Zahl 1 liegt in C und in A, aber nicht in B.

Aufgabe 3. Alle vier Aussagen sind wahr. Zu den Beweisen:

a) Möglich ist beispielsweise ein indirekter Beweis, also ein Beweis der äquivalenten Aussage

$$Q : \forall a, b \in \mathbb{Z} : (a + b \text{ ist ungerade} \Longrightarrow a \cdot b \text{ ist gerade}).$$

Seien also $a, b \in \mathbb{Z}$, so daß $a+b$ ungerade ist. Wir zeigen als Zwischenschritt, daß dann a und/oder b gerade sein muß: Denn andernfalls wären beide ungerade, also $a = 2k + 1$ und $b = 2\ell + 1$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$, und dann wäre $a+b = 2k+1+2\ell+1 = 2k+2\ell+2 = 2\cdot(k+\ell+1)$ gerade, Widerspruch. Also ist a gerade oder b gerade. Im ersten Fall ist $a = 2k$ und damit $a \cdot b = 2k \cdot b = 2 \cdot (kb)$ gerade, im zweiten Fall ist $b = 2\ell$ und damit $a \cdot b = a \cdot 2\ell = 2 \cdot (a\ell)$ ebenfalls gerade.

b) Auch diese Aussage ist wahr, und auch sie läßt sich indirekt beweisen. Wir zeigen also:

$$R : \forall a, b \in \mathbb{Z} : ((a \text{ oder } b \text{ ist ungerade}) \Longrightarrow (a+b \text{ oder } a \cdot b \text{ ist ungerade}))\,.$$

Seien also $a, b \in \mathbb{Z}$, und a oder b sei ungerade. Beide Fälle behandeln wir einzeln:

(i) Nehmen wir an, daß a ungerade ist, also $a = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es zwei Fälle: Entweder b ist ebenfals ungerade, also $b = 2\ell + 1$, oder b ist gerade, also $b = 2\ell$ (mit $\ell \in \mathbb{Z}$). Im ersten Fall ist $a \cdot b = (2k+1) \cdot (2\ell+1) = 4k\ell + 2k + 2\ell + 1 = 2(2k\ell + k + \ell) + 1$ ungerade, im zweiten Fall ist $a + b = 2k + 1 + 2\ell = 2(k+\ell) + 1$ ungerade, wie behauptet.

(ii) Nehmen wir an, daß b ungerade ist, also $b = 2\ell + 1$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es zwei Fälle: Entweder a ist ebenfals ungerade, also $a = 2k+1$, oder a ist gerade, also $a = 2k$ (mit $k \in \mathbb{Z}$). Im ersten Fall ist $a \cdot b = (2k+1) \cdot (2\ell+1) = 4k\ell + 2k + 2\ell + 1 = 2(2k\ell + k + \ell) + 1$ ungerade, im zweiten Fall ist $a + b = 2k + 2\ell + 1 = 2(k+\ell) + 1$ ungerade, wie behauptet.

Es fällt auf, daß wir in beiden Fällen, (i) und (ii), exakt den gleichen Beweis führen konnten, nur mit vertauschten Rollen von a und b. Der Grund dafür liegt darin, daß sich sowohl die Voraussetzung („a oder b ist ungerade“) als auch die Behauptung („$a + b$ oder $a \cdot b$ ist ungerade“) nicht ändert, wenn a und b miteinander vertauscht werden. Wegen dieser Symmetrie genügt es also eigentlich, den Beweis *einmal* (also etwa für den Fall, daß a ungerade ist) zu führen und darauf hinzuweisen, daß dieser Fall bereits den anderen Fall miterledigt. Übliche Formulierungen dafür sind:

> „Es sei a oder b ungerade. Wir können aus Symmetriegründen annehmen, daß a ungerade ist. …“,

oder auch:

> „Es sei a oder b ungerade; ohne Beschränkung der Allgemeinheit (kurz: o.B.d.A.) können wir annehmen, daß es a ist. …“

c) Wir wissen schon (und haben wiederholt nachgewiesen): Ist ein Faktor in einem Produkt gerade, so ist das Produkt wieder gerade. Dafür, daß $(a+b) \cdot c$ für alle $c \in \mathbb{Z}$ gerade ist, ist es also hinreichend (*de facto* sogar auch notwendig), daß $a + b$ gerade ist. Die Aussage

$$\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z} : a + b \text{ ist gerade}$$

ist aber sicher wahr, denn man kann stets $b := a$ (oder $b := -a$, oder …) wählen, und $a + a = 2a$ ist gerade (oder $a + (-a) = 0$ ist gerade, oder …).

d) Die äußerste Schicht ist die Frage nach der Existenz eines $a \in \mathbb{Z}$ mit gewissen Eigenschaften. Ich zeige, daß $a = 0$ diese Eigenschaft hat (in Wirklichkeit gilt sie sogar für *alle* ganzen Zahlen). Dazu muß ich also zeigen:

$$\forall b \in \mathbb{Z}\ \exists c \in \mathbb{Z} : b \cdot c \text{ ist gerade}$$

Aber dies ist wahr, denn man kann, unabhängig vom Wert von b, immer $c = 0$ (oder $c = 2$, oder …) nehmen.

Aufgabe 4.

a) Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ ist: Denn dann ist auch $\mathcal{P}(B) \subset P(A \cup B)$ (dazu vertauscht man nur die Rollen von A und B), und zusammen folgt $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$).

Aber wir zeigen eine viel allgemeinere Aussage, nämlich: Ist $A \subset C$, so ist $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(C)$ (das wenden wir dann an auf $C := A \cup B$).

Zum Beweis nehmen wir ein Element $X \in \mathcal{P}(A)$; nach Definition der Potenzmenge ist X einfach eine Teilmenge von A, also $X \subset A$. Wegen $A \subset C$ gilt dann auch $X \subset C$, also $X \in \mathcal{P}(C)$. Also liegt jedes Element von $\mathcal{P}(A)$ auch in $\mathcal{P}(C)$, und das ist die behauptete Inklusion $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(C)$.

b) Diese Aussage ist immer wahr, wenn nicht eine der Mengen A und B in der anderen enthalten ist. Beispielsweise für $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$ ist

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\},$$

aber

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

(Genauer fehlen in $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ genau diejenigen Teilmengen von $A \cup B$, die weder ganz in A noch ganz in B liegen.)

c) Wir zeigen die beiden Inklusionen $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ sowie $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$ einzeln:

- Für die erste Inklusion beobachten wir, daß wegen $A \cap B \subset A$ auch $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A)$ gilt; wegen $A \cap B \subset B$ sieht man genauso $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(B)$ ist, und zusammen bedeutet das $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
- Für die zweite Inklusion sei $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, also $X \in \mathcal{P}(A)$ und $X \in \mathcal{P}(B)$. Das bedeutet $X \subset A$ und $X \subset B$, und insgesamt heißt das $X \subset A \cap B$ (denn jedes Element von X liegt in A und B, also in $A \cap B$). Das bedeutet $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$, und insgesamt folgt $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$.