MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Moser

WS 2013/14
Blatt 2
1.11.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Wir müssen die Richtigkeit der Aussage

$$P: \quad \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$$

beweisen. Es ist

$$\begin{aligned}
& 0 \leq (a-b)^2 \\
\Longrightarrow \quad & 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\
\Longrightarrow \quad & 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\
\Longrightarrow \quad & \frac{4ab}{a+b} \leq a+b \\
\Longrightarrow \quad & \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2},
\end{aligned}$$

aber da

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}} = \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

ist, ist damit die Aussage P bewiesen.

b) Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist der Wert

$$\frac{\text{insgesamt zurückgelegte Strecke}}{\text{insgesamt benötigte Zeit}}.$$

In der ersten Stunde, in der er mit a km/h gefahren ist, hat der Fahrradfahrer a km zurückgelegt, entsprechend in der zweiten Stunde b km. Seine durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt also

$$\frac{a \text{ km} + b \text{ km}}{2 \text{ h}} = \frac{a+b}{2} \text{ km/h}.$$

c) Wir kennen nicht die Länge der Strecke den Berg hinauf, müssen für sie also einen Buchstaben schreiben: Bezeichnen wir sie mit s km. Wegen

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}} \quad \Longrightarrow \quad \text{Zeit} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Geschwindigkeit}}$$

benötigt der Fahrradfahrer für die Fahrt aufwärts dann eine Zeit von

$$\frac{s \text{ km}}{a \text{ km/h}} = \frac{s}{a} \text{ h}$$

und für die Fahrt abwärts entsprechend eine Zeit von

$$\frac{s \text{ km}}{b \text{ km/h}} = \frac{s}{b} \text{ h}.$$

Weil er insgesamt die Strecke $2s$ km zurücklegt, beträgt seine durchschnittliche Geschwindigkeit also

$$\frac{2s \text{ km}}{\frac{s}{a} \text{ h} + \frac{s}{b} \text{ h}} = \frac{2s}{\frac{s}{a} + \frac{s}{b}} \text{ km/h} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \text{ km/h}.$$

2. a) Wir zeigen die erste Aussage:

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad \big[A(z) \implies B(z)\big]$$

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und gelte z ist ungerade. Zu zeigen ist: $z^2 + 2z + 3$ ist gerade.
Weil $z \in \mathbb{Z}$ ungerade, gibt es nach Definition 1.13 b) ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = 2k + 1$.
Es folgt dann mit Hilfe der Binomischen Formel

$$\begin{aligned} z^2 + 2z + 3 &= (2k+1)^2 + 2(2k+1) + 3 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 + 3 \\ &= 4k^2 + 8k + 6 \\ &= 2(\underbrace{2k^2 + 4k + 3}_{\in \mathbb{Z}}). \end{aligned}$$

Damit ist z^2 nach Definition 1.13 a) gerade.

Auch folgende Kurzversion des Beweises wird akzeptiert:

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und gelte z ist ungerade.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Def. 1.13b)}}{\implies} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \ : \ z = 2k + 1 \\ &\implies \quad z^2 + 2z + 3 = (2k+1)^2 + 2(2k+1) + 3 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 + 3 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = 4k^2 + 8k + 6 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = 2(\underbrace{2k^2 + 4k + 3}_{\in \mathbb{Z}}). \\ &\overset{\text{Def. 1.13a)}}{\implies} \quad z^2 + 2z + 3 \ \text{ ist gerade.} \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die zur zweiten Aussage

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad \big[B(z) \implies A(z)\big]$$

äquivalente Aussage

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad \big[\neg A(z) \implies \neg B(z)\big]$$

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und gelte z ist nicht ungerade, also gerade. Zu zeigen ist: $z^2 + 2z + 3$ ist ungerade.
Weil $z \in \mathbb{Z}$ gerade, gibt es nach Definition 1.13 b) ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = 2k$. Es folgt dann mit Hilfe der Binomischen Formel

$$\begin{aligned} z^2 + 2z + 3 &= (2k)^2 + 2(2k) + 3 \\ &= 4k^2 + 4k + 3 \\ &= 4k^2 + 4k + 2 + 1 \\ &= 2(\underbrace{2k^2 + 2k + 1}_{\in \mathbb{Z}}) + 1. \end{aligned}$$

Damit ist z^2 nach Definition 1.13 b) ungerade.

Auch folgende Kurzversion des Beweises wird akzeptiert:

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und gelte z ist gerade.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Def. 1.13a)}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; z = 2k \\ &\Longrightarrow \quad z^2 + 2z + 3 = (2k)^2 + 2(2k) + 3 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = 4k^2 + 4k + 3 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = 4k^2 + 4k + 2 + 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = 2(\underbrace{2k^2 + 2k + 1}_{\in \mathbb{Z}}) + 1. \\ &\overset{\text{Def. 1.13b)}}{\Longrightarrow} \quad z^2 + 2z + 3 \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

b) Wir zeigen die Aussage:

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad \big[A(z) \implies C(z)\big]$$

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und gelte z ist ungerade.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Def. 1.13b)}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; z = 2k + 1 \\ &\Longrightarrow \quad z^2 + z + 1 = (2k+1)^2 + (2k+1) + 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\; = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 + 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\; = 4k^2 + 6k + 2 + 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\; = 2(\underbrace{2k^2 + 3k + 1}_{\in \mathbb{Z}}) + 1. \\ &\overset{\text{Def. 1.13b)}}{\Longrightarrow} \quad z^2 + z + 1 \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

Die Aussage

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad \big[C(z) \implies A(z)\big]$$

ist falsch, denn für z.B. $z = 2$ ist $z^2 + z + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$ ungerade (also gilt $C(2)$), aber die Aussage $A(2)$ ist falsch, denn $z = 2$ ist gerade.

3. a) Die Negationen von P_1 und P_2 lauten

$$\neg P_1 \quad \forall x \in M \quad \exists y \in M \ : \ x > y,$$
$$\neg P_2 \quad \exists y \in M \quad \forall x \in M \ : \ x > y,$$

b) Die Aussage P_1 ist im Fall $M = \mathbb{N}$ **wahr**, denn:
Wähle $x = 1$. Dann gilt in der Tat für alle $y \in \mathbb{N}$, daß $x = 1 \leq y$.

Die Aussage P_1 ist im Fall $M = \mathbb{Z}$ **falsch**, also $\neg P_1$ ist wahr, denn:
Sei $x \in \mathbb{Z}$. Dann gilt mit der Wahl von $y := x - 1$, daß $x > x - 1 = y$.

Die Aussage P_2 ist für jede Teilmenge $M \subset \mathbb{Z}$ **wahr**, also insbesondere für $M = \mathbb{N}$ und $M = \mathbb{Z}$, denn:
Sei $y \in M$. Dann gilt mit der Wahl von $x := y$, daß $x \leq x = y$.

4. a) Es ist
$$A \subset B \implies a \in \{9, a+1, 3\} \implies a = 9 \ \vee \ a = 3.$$
Aus $a = 9$ folgt, daß $B = \{9, 10, 3\}$ und $A = \{4, 9, 2x\}$, also wegen $4 \notin B$, daß $A \not\subset B$, ein Widerspruch zu $A \subset B$.
Aus $a = 3$ folgt, daß $B = \{9, 4, 3\}$ und $A = \{4, 3, 2x\}$, also, wegen $A \subset B$, daß $x \in \{1.5, 2, 4.5\}$.
Zusammenfassend gilt also
$$A \subset B \implies a = 3 \ \wedge \ x \in \{1.5, 2, 4.5\}.$$
Da zudem auch
$$\begin{aligned} a = 3 \ \wedge \ x \in \{1.5, 2, 4.5\} &\implies \Big(A = \{4,3\} \vee A = \{4,3,9\}\Big) \ \wedge \ B = \{9,4,3\} \\ &\implies A \subset B, \end{aligned}$$
ist also
$$A \subset B \iff a = 3 \ \wedge \ x \in \{1.5, 2, 4.5\}.$$

b) i) Es ist $N = \{3, 0, -1, 0, 3, 8\} = \{-1, 0, 3, 8\}$

ii) Es ist
$$\begin{aligned} M \cup N &= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 8\} \\ M \cap N &= \{-1, 0, 3\} \\ N \setminus M &= \{8\}. \end{aligned}$$

iii) Es ist
$$\begin{aligned} \{(x,y) \in M \times N \mid x < y\} = \big\{&(-2,-1), (-2,0), (-2,3), (-2,8), \\ &(-1,0), (-1,3), (-1,8), (0,3), (0,8), \\ &(1,3), (1,8), (2,3), (2,8), (3,8)\big\}. \end{aligned}$$