MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Moser

WS 2013/14
Blatt 1
23.10.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ — Lösungsvorschlag —

1. Wir betrachten die folgenden Aussagen:

P: „Max liest ein Buch.“ und Q: „Max hört Musik.“

   a) Für die sprachlichen Formulierungen folgender Aussagen ergibt sich:
   - $P \wedge Q$: „Max liest ein Buch und hört dabei Musik.“
   - $P \vee Q$: „Max liest ein Buch oder hört Musik oder er macht beides“
   - $P \implies Q$: „Wenn Max ein Buch liest, dann hört er Musik.“
   - $P \iff Q$: „Max liest genau dann ein Buch, wenn er Musik hört.“

   b) Für die formale Verneinung der in a) betrachteten Aussagen ergibt sich:
   - $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$
   - $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$
   - $\neg(P \implies Q) \iff P \wedge \neg Q$
   - $\neg(P \iff Q) \iff (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

   Für die sprachliche Verneinung der in a) betrachteten Aussagen ergibt sich:
   - $\neg(P \wedge Q)$: „Max liest nicht ein Buch oder hört nicht Musik.“
   - $\neg(P \vee Q)$: „Max liest nicht ein Buch und hört nicht Musik.“
   - $\neg(P \implies Q)$: „Max liest ein Buch und hört nicht dabei Musik.“
   - $\neg(P \iff Q)$: „Entweder Max liest ein Buch oder er hört Musik.“

2. a) Mit Hilfe einer Wahrheitstafel erhalten wir

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	f
f	w	w	w	w	f	f	f
f	w	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

und damit sind die beiden Aussagen $P \vee (Q \wedge R)$ und $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ nicht äquivalent.

b) Mit Hilfe einer Wahrheitstafel erhalten wir

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

und damit sind die beiden Aussagen $P \vee (Q \wedge R)$ und $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ äquivalent.

c) Mit Hilfe einer Wahrheitstafel erhalten wir

P	Q	R	$P \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

und damit sind die beiden Aussagen $P \wedge (Q \vee R)$ und $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ äquivalent.

d) Mit Hilfe einer Wahrheitstafel erhalten wir

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w	w	w
f	w	f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

und damit sind die beiden Aussagen $P \wedge (Q \vee R)$ und $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ nicht äquivalent.

3. Die Aussage "entweder P oder Q" besitzt folgende Wahrheitstafel:

P	Q	"entweder P oder Q"
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Es gilt

$$\text{"entweder } P \text{ oder } Q\text{"} \iff (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q),$$

wie die folgende Wahrheitstafel zeigt:

P	Q	"entw. P oder Q"	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$	... $\iff$ ...
w	w	f	f	f	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w	f	w	w
f	f	f	w	w	f	f	f	w

4. Für die Aussage

$$(*) \qquad \big((P \implies R) \wedge (Q \implies R)\big) \implies (P \implies Q)$$

ergibt sich die Wahrheitstafel

P	Q	R	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow Q$	$(*)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	f	w	w
w	f	w	w	w	w	f	f
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

damit ist die Aussage nicht allgemeingültig, also keine Tautologie. Wir machen uns dies an einem Beispiel deutlich: Max nimmt an einer Klausur teil, die mit mindestens 12 von 24 Punkten bestanden ist, für die drei Aussagen

- P: „Max hat 24 Punkte."
- Q: „Max hat 18 Punkte."
- R: „Max besteht die Klausur."

sind also die Implikationen $P \implies R$ und $Q \implies R$ wahr und damit auch die Konjunktion $(P \implies R) \wedge (Q \implies R)$; damit kann aber nicht die Implikation $P \implies Q$ gefolgert werden, und dementsprechend ist insgesamt die Aussage $\big((P \implies R) \wedge (Q \implies R)\big) \implies (P \implies Q)$ falsch.

Für die Aussage

$$(**) \qquad \big((P \implies R) \wedge (Q \implies \neg R)\big) \implies (P \implies \neg Q)$$

ergibt sich die Wahrheitstafel

P	Q	R	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow \neg R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow \neg R)$	$P \Rightarrow \neg Q$	$(**)$
w	w	w	w	f	f	f	w
w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w	w
f	w	w	w	f	f	w	w
f	w	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

damit ist die Aussage allgemeingültig, also eine Tautologie; sie besagt: folgt aus P stets R und aus Q stets $\neg R$, so kann daraus gefolgert werden, daß aus P sicher $\neg Q$ folgt.