Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es wird sich zeigen, daß surjektive Abbildungen wesentlich schwieriger zu zählen sind als injektive.

a) Die Angabe einer *injektiven* Abbildung $f : M \to N$ erfolgt durch $|M|$-faches Ziehen aus einer Urne, die alle $|N|$ Elemente von N enthält, ohne Zurücklegen (das ist die Injektivität) und mit Beachtung der Reihenfolge. Dafür gibt es

$$\frac{|N|!}{(|N|-|M|)!} = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Möglichkeiten.

Eine *surjektive* Abbildung $f : M \to N$ existiert nicht, weil $4 = |M| < |N| = 7$ gilt; M hat also zu wenige Elemente.

b) Eine *injektive* Abbildung $f : N \to M$ existiert nicht, weil $7 = |N| > |M| = 4$ ist; N hat also zu viele Elemente.

Zum Zählen aller *surjektiven* Abbildungen $f : N \to M$ unterscheiden wir mehrere mögliche Typen solcher Abbildungen: Jede solche Abbildung trifft alle 4 Elemente von M; für die Frage, *wie oft* welches Element von M getroffen wird, gibt es nun aber mehrere Möglichkeiten:

(i) f kann ein Element von M genau viermal und die drei übrigen je genau einmal treffen.

(ii) f kann ein Element von M genau dreimal, eines genau zweimal und die beiden übrigen je genau einmal treffen.

(iii) f kann drei Elemente von M je genau zweimal und das vierte Element genau einmal treffen.

Die Ermittlung dieser Möglichkeiten läßt sich folgendermaßen allgemein beschreiben: Wir suchen alle Möglichkeiten, die Zahl $|N| = 7$ als Summe von 4 Zahlen ≥ 1 zu schreiben, wobei wir (da uns die Reihenfolge erst einmal egal ist) annehmen können, daß die Summanden in absteigender Größe angegeben werden. Dafür gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:

$$7 = 4 + 1 + 1 + 1$$
$$7 = 3 + 2 + 1 + 1$$
$$7 = 2 + 2 + 2 + 1$$

Im allgemeinen ist die Bestimmung der Anzahl solcher Zerlegungen (der Zahl n in m absteigend sortierte Summanden ≥ 1) ein Problem der sogenannten *additiven Zahlentheorie*.

Wir zählen nun für jede der drei Möglichkeiten die Anzahl der Abbildungen dieses Typs:

(i) Es gibt 4 Möglichkeiten für die Auswahl des vierfach getroffenen Elements; für die Auswahl seiner Urbildmenge gibt es $\binom{7}{4} = 35$ Möglichkeiten, und für die Verteilung der Bilder der übrigen drei Elemente von N gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $4 \cdot 35 \cdot 6 = 840$ Abbildungen des ersten Typs.

(ii) Es gibt 4 Möglichkeiten für die Auswahl des dreifach und dann 3 Möglichkeiten für die Auswahl des zweifach getroffenen Elementes. Für die Urbildmenge des ersteren gibt es $\binom{7}{3} = 35$, für die des zweiten dann noch $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten; für die Verteilung der Bilder der übrigen beiden Elemente von N gibt es dann noch $2 \cdot 1 = 2$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es damit $4 \cdot 3 \cdot 35 \cdot 6 \cdot 2 = 5.040$ Abbildungen des zweiten Typs.

(iii) Hier lohnt es, sich für die Menge M eine sortierbare Menge (etwa $M = \{1, 2, 3, 4\}$) vorzustellen – das ändert sicher nichts am Ergebnis.

Es gibt $\binom{4}{3} = 4$ Möglichkeiten für die Auswahl der drei zweifach getroffenen Elemente von M. Nun nutzen wir die Sortierung aus: Für die Urbildmenge des *kleinsten* dieser Elemente gibt es $\binom{7}{2} = 21$ Möglichkeiten, für die des nächstgrößeren dann noch $\binom{5}{2} = 10$ und für die des größten schließlich $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten. Die Abbildung ist damit vollständig festgelegt, denn das einzige verbliebene Element von N muß auf das übriggebliebene Element von M abgebildet werden.

Insgesamt gibt es damit $4 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 3 = 2.520$ Abbildungen des dritten Typs.

Zusammen gibt es also $840 + 5.040 + 2.520 = 8.400$ surjektive Abbildungen $N \to M$.

Für Interessierte: Wie kann man surjektive Abbildungen allgemein zählen?

Um die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f : N \to M$ mit $|N| = n$ und $|M| = m$ zu zählen, kann man folgendermaßen vorgehen: Es schadet nicht, anzunehmen, daß $M = \{1, \ldots, m\}$ ist. Ist nun $f : N \to M$ surjektiv, so bilden die Mengen $f^{-1}(\{1\}), \ldots, f^{-1}(\{m\})$ eine Zerlegung von N in m paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen. Ist umgekehrt $N = N_1 \cup \ldots \cup N_m$ eine Zerlegung von N in paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen, so erhält man eine surjektive Abbildung $f : N \to M$ durch die Festlegung, daß f jeweils die Elemente der Menge N_j auf die Zahl j abbilden soll, $j = 1, \ldots, m$.

Wir müssen also nur zählen, auf wieviele verschiedene Weisen man die Menge n in m paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen zerlegen („partitionieren“) kann. Die Anzahl dieser Möglichkeiten bezeichnet man üblicherweise mit $S(n, m)$ („Stirling-Zahlen zweiter Art“); da hier aber konventionsgemäß die Teilmengen von N nur als „Haufen“ ohne Angabe einer Reihenfolge gemeint sind, beträgt die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \to M$ genau $m! \cdot S(n, m)$.

Um $S(n, m)$ bequem bestimmen zu können, hilft die folgende Überlegung: Man fixiere ein Element $n_0 \in N$ und setze $N' := N \setminus \{n_0\}$. Von den Partitionen von N in m nichtleere Teilmengen gibt es nun zwei Typen:

- Diejenigen Partitionen, in denen die Menge $\{n_0\}$ auftritt. Davon gibt es ebensoviele, wie Partitionen von N' in $m - 1$ Teilmengen, also $S(n - 1, m - 1)$ Stück.
- Diejenigen Partitionen, in denen das Element n_0 mit mindestens einem anderen Element zusammengeschnürt ist. Eine solche Partition liefert (durch Fortlassen von n_0) eine Partition von N' in m Teilmengen, wovon es $S(n - 1, m)$ Stück gibt. Da aber n_0 in einer beliebigen dieser m Teilmengen enthalten gewesen sein kann, gehören zu diesen Partitionen von N' jeweils m verschiedene Partitionen von N; also gibt es $m \cdot S(n - 1, m)$ Partitionen dieses Typs.

Diese Überlegungen beweisen die Rekursionsformel (man beachte die Ähnlichkeit mit der Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten!)

$$S(n, m) = S(n - 1, m - 1) + m \cdot S(n - 1, m) \quad \text{für alle } n, m \geq 1.$$

Da außerdem offensichtlich $S(0, 0) = 1$ und $S(0, m) = 0 = S(n, 0)$ für $n, m \geq 1$ ist, können wir die Stirlingzahlen zweiter Art nun wie die Binomialkoeffizienten in einem Dreieck anordnen, in dem sich jede Zahl gemäß unserer Rekursionsformel aus den beiden darüberstehenden ergibt:

$$\begin{array}{c}
1 \\
0 \qquad 1 \\
0 \qquad 1 \qquad 1 \\
0 \qquad 1 \qquad 3 \qquad 1 \\
0 \qquad 1 \qquad 7 \qquad 6 \qquad 1 \\
0 \qquad 1 \qquad 15 \qquad 25 \qquad 10 \qquad 1 \\
0 \qquad 1 \qquad 31 \qquad 90 \qquad 65 \qquad 15 \qquad 1 \\
0 \qquad 1 \qquad 63 \qquad 301 \qquad \boxed{350} \qquad 140 \qquad 21 \qquad 1
\end{array}$$

Die umrahmte Zahl ist $S(7,4) = 350$, und für die Anzahl der surjektiven Abbildungen von einer 7- in eine 4-elementige Menge ergibt sich damit $4! \cdot S(7,4) = 24 \cdot 350 = 8.400$, wie wir sie auch oben erhalten hatten.

Aufgabe 2.

a) Um zur Bestimmung von σ^{2014} nicht 2014 Faktoren multiplizieren zu müssen, wäre es nützlich, zu wissen, welche Potenzen von σ die Identität sind – wir sollten also die *Ordnung* von σ bestimmen. Dies geht am einfachsten, indem wir σ als Produkt disjunkter Zyklen schreiben (denn dann ist die Ordnung von σ das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen dieser Zyklen). Aber es ist $\sigma = (2\ \ 4\ \ 8) \circ (3\ \ 5\ \ 7)$, also $\operatorname{ord}(\sigma) = 3$ und damit $\sigma^3 = \mathrm{id}$. Wegen $2014 = 671 \cdot 3 + 1$ gilt damit

$$\sigma^{2014} = \sigma^{671 \cdot 3 + 1} = (\sigma^3)^{671} \circ \sigma = \mathrm{id}^{671} \circ \sigma = \mathrm{id} \circ \sigma = \sigma.$$

Außerdem ergibt sich

$$\sigma^{-1} = (8\ \ 4\ \ 2) \circ (7\ \ 5\ \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 1 & 8 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Es muß

$$\begin{aligned} \alpha = \sigma^{-1} \circ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \beta = \tau \circ \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sein.

c) Es ist $\sigma = (2\ \ 4\ \ 8) \circ (3\ \ 5\ \ 7) = (2\ \ 4)(4\ \ 8)(3\ \ 5)(5\ \ 7)$ sowie $\tau = (1\ \ 3\ \ 6\ \ 2\ \ 7) \circ (4\ \ 8) = (1\ \ 3)(3\ \ 6)(6\ \ 2)(2\ \ 7)(4\ \ 8)$ und damit $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ (denn es sind 4 Transpositionen, und 4 ist eine gerade Zahl) sowie $\operatorname{sign}(\tau) = -1$ (denn es sind 5 Transpositionen, und 5 ist eine ungerade Zahl).

   Damit kann es aber kein $\psi \in S_8$ geben mit $\sigma \circ \psi = \psi \circ \tau$: Denn dann wäre (durch Anwenden der Funktion sign auf beiden Seiten der Gleichung und Verwenden ihrer Multiplikativität)

$$\begin{aligned} & \operatorname{sign}(\sigma \circ \psi) = \operatorname{sign}(\psi \circ \tau) \\ \Longrightarrow\quad & \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\psi) = \operatorname{sign}(\psi) \cdot \operatorname{sign}(\tau) \\ \Longrightarrow\quad & \operatorname{sign}(\psi) = -\operatorname{sign}(\psi), \end{aligned}$$

   was unmöglich ist.

Aufgabe 3. Wir gehen wieder so vor, wie im Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 vom 13. Tutoriumsblatt beschrieben: Wir geben also zunächst die Zyklusdarstellungen aller Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau k Fixpunkten ($k = 0, 1, \ldots, 6$) an und zählen danach, wieviele verschiedene Permutationen eines jeden Typs es jeweils gibt.
Wieder sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und es seien jeweils $a, b, c, d, e, f \in M$ paarweise verschieden.

- Für $k = 0$ darf σ nur Zyklen der Länge ≥ 2 enthalten (die außerdem ganz M abdecken müssen). Dafür gibt es die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{array}{rll} & \sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f) & \text{(6-Zyklus)} \\ \text{oder} & \sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d) \circ (e\ \ f) & \text{(ein 4-Zyklus und ein 2-Zyklus)} \\ \text{oder} & \sigma = (a\ \ b\ \ c) \circ (d\ \ e\ \ f) & \text{(zwei 3-Zyklen)} \\ \text{oder} & \sigma = (a\ \ b) \circ (c\ \ d) \circ (e\ \ f) & \text{(drei 2-Zyklen).} \end{array}$$

  (Diese Vielzahl von Möglichkeiten könnte uns auf die Idee bringen, diese Permutationen dieses Typs nicht Fall für Fall zu zählen, sondern ihre Anzahl nach Erledigung aller anderen Fälle aus der *Gesamtzahl* $6! = 720$ von Permutationen in S_6 zu erschließen.)

- Im Fall $k = 1$ enthält σ einen „1-Zyklus“ (a); alle anderen Zahlen aus M müssen in Zyklen der Länge ≥ 2 auftauchen. Dafür gibt es also die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{array}{rll} & \sigma = (a) \circ (b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f) = (b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f) & \text{(5-Zyklus)} \\ \text{oder} & \sigma = (a) \circ (b\ \ c\ \ d) \circ (e\ \ f) & \text{(ein 3-Zyklus und ein 2-Zyklus).} \end{array}$$

- Im Fall $k = 2$ enthält σ zwei „1-Zyklen“ $(a) \circ (b)$; alle anderen Zahlen aus M müssen in Zyklen der Länge ≥ 2 auftauche. Dafür gibt es die folgenden Möglichkeiten

$$\begin{array}{rll} & \sigma = (a) \circ (b) \circ (c\ \ d\ \ e\ \ f) = (c\ \ d\ \ e\ \ f) & \text{(4-Zyklus)} \\ \text{oder} & \sigma = (a) \circ (b) \circ (c\ \ d) \circ (e\ \ f) = (c\ \ d) \circ (e\ \ f) & \text{(Doppeltransposition).} \end{array}$$

- Im Fall $k = 3$ enthält σ drei „1-Zyklen“ $(a) \circ (b) \circ (c)$; alle anderen Zahlen aus M kommen in Zyklen der Länge ≥ 2 vor. Dafür gibt es nur die Möglichkeit

$$\sigma = (a) \circ (b) \circ (c) \circ (d\ \ e\ \ f) = (c\ \ d\ \ e\ \ f) \qquad \text{(3-Zyklus).}$$

- Im Fall $k = 4$ enthält σ vier „1-Zyklen“ $(a) \circ (b) \circ (c) \circ (d)$; die beiden übrigen Zahlen aus M müssen dann in einem 2-Zyklus stehen, also gibt es nur die Möglichkeit

$$\sigma = (a) \circ (b) \circ (c) \circ (d) \circ (e\ \ f) = (e\ \ f) \qquad \text{(2-Zyklus).}$$

- Im Fall $k = 5$ enthält σ vier „1-Zyklen“ $(a) \circ (b) \circ (c) \circ (d) \circ (e)$; dann ist aber nur noch eine weitere Zahl $e \in M$ übrig, die damit notwendig ebenfalls in einem 1-Zyklus (e) stehen muß und damit ein sechster Fixpunkt von σ ist. Also tritt der Fall $k = 5$ nicht auf.

- Im Fall $k = 6$ fixiert σ alle Element von M, d.h. $\sigma = \mathrm{id}$.

Nun untersuchen wir wieder die Anzahl verschiedener Permutationen jedes der angegebenen Typen. Wir fangen, das hat sich bewährt, von hinten an:

- Genau $k = 6$ Fixpunkte hat nur die Identität, also nur eine einzige Permutation.

- Genau $k = 5$ Fixpunkte kommen nicht vor.

- Genau $k = 4$ Fixpunkte haben nur die Transpositionen $(e\ \ f)$; da eine solche durch die Angabe ihrer Trägermenge $\{e, f\} \subset M$ eindeutig bestimmt ist und es $\frac{6}{2} = 15$ verschiedene zweielementige Teilmengen von M gibt, gibt es 15 Permutationen dieses Typs.

- Genau $k = 3$ Fixpunkte haben nur die 3-Zyklen $(d\ \ e\ \ f)$. Für ihre Trägermenge $\{d, e, f\}$ gibt es $\binom{6}{3} = 20$ Möglichkeiten; wie in der Lösung zu Aufgabe 3 vom 13. Tutoriumsblatt erklärt, gibt es aber jeweils $2 \cdot 1 = 2$ verschiedene 3-Zyklen mit identischer Trägermenge (nämlich $(d\ \ e\ \ f)$ und $(d\ \ f\ \ e)$), also gibt es insgesamt $20 \cdot 2 = 40$ Permutationen mit genau 3 Fixpunkten.

- Genau $k = 2$ Fixpunkte haben sowohl die 4-Zyklen $(c\ \ d\ \ e\ \ f)$ als auch die Doppeltranspositionen $(c\ \ d) \circ (e\ \ f)$.

  - Für die Trägermenge $\{c, d, e, f\}$ eines 4-Zyklus $(c\ \ d\ \ e\ \ f)$ gibt es $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten; wie im Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 vom 13. Tutoriumsblatt erklärt, gibt es aber jeweils $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschiedene 4-Zyklen mit identischer Trägermenge. Also gibt es $15 \cdot 6 = 90$ 4-Zyklen in S_6.
  - Für die Trägermenge $\{c, d, e, f\}$ einer Doppeltransposition $(c\ \ d) \circ (e\ \ f)$ gibt es wieder $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten, aber (wie bereits beim 13. Tutoriumsblatt erklärt) es gibt jeweils genau 3 Doppeltranspositionen mit identischer Trägermenge. Also gibt es $15 \cdot 3 = 45$ Doppeltranspositionen in S_6.

  Insgesamt gibt es also $90 + 45 = 135$ Permutationen in S_6 mit genau 2 Fixpunkten.

- Genau $k = 1$ Fixpunkt haben sowohl die 5-Zyklen $(b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f)$ als auch die Produkte $(b\ \ c\ \ d) \circ (e\ \ f)$ aus einem 3-Zyklus und einer Transposition.

  - Für die Trägermenge $\{b, c, d, e, f\}$ eines 5-Zyklus $(b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f)$ gibt es $\binom{6}{5} = 6$ Möglichkeiten, und da es jeweils $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ 5-Zyklen mit identischer Trägermenge gibt, ergibt sich die Anzahl von $6 \cdot 24 = 144$ 5-Zyklen in S_6.
  - Für die Trägermenge $\{b, c, d, e, f\}$ eines Produktes $(b\ \ c\ \ d) \circ (e\ \ f)$ gibt es wieder $\binom{6}{5} = 6$ Möglichkeiten. Für die Auswahl der beiden in der Transposition $(e\ \ f)$ auftretenden Elemente der Trägermenge gibt es dann $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten, und aus den drei verbleibenden Zahlen lassen sich 2 verschiedene 3-Zyklen bilden. Also gibt es insgesamt $6 \cdot 10 \cdot 2 = 120$ Produkte dieser Form in S_6.

  Insgesamt gibt es also $144 + 120 = 264$ Permutationen in S_6 mit genau einem Fixpunkt.

Damit gibt es in S_6 genau $264 + 135 + 40 + 15 + 0 + 1 = 455$ Permutationen mit mindestens einem Fixpunkt; da $|S_6| = 6! = 720$ ist, bleiben damit $720 - 455 = 265$ Permutationen *ohne* Fixpunkt in S_6. Wir zeigen aber, wie man diese Zahl auch (mühsamer) durch direktes Zählen bestimmen kann:

- Genau $k=0$ Fixpunkte haben die 6-Zyklen $(a \ \ b \ \ c \ \ d \ \ e \ \ f)$, die Produkte $(a \ \ b \ \ c \ \ d)(e \ \ f)$ aus einem 4-Zyklus und einer Transposition, die Produkte $(a \ \ b \ \ c)(d \ \ e \ \ f)$ aus drei 3-Zyklen sowie die Dreifachtranspositionen $(a \ \ b)(c \ \ d)(e \ \ f)$. Wir zählen alle vier Typen einzeln, wobei die „Trägermenge" nun keine Rolle mehr spielt, denn sie ist stets ganz M:
  - Es gibt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ verschiedene 6-Zyklen in S_6.
  - Es gibt ebensoviele Produkte $(a \ \ b \ \ c \ \ d)(e \ \ f)$ aus einem 4-Zyklus und einer Transposition, wie es 4-Zyklen gibt (denn man muß nur einen 4-Zyklus um die Anweisung „...und vertausche die beiden nicht vorkommenden Zahlen" ergänzen). Deren Anzahl haben wir schon (unter $k=2$) als 90 bestimmt.
  - Es gibt ebensoviele Produkte $(a \ \ b \ \ c)(d \ \ e \ \ f)$ aus zwei 3-Zyklen, wie es 3-Zyklen gibt – der Grund ist ein wenig subtil: Zunächst kann jeder 3-Zyklus $(a \ \ b \ \ c)$ auf zwei Arten zu einem solchen Produkt ergänzt werden, nämlich als $(a \ \ b \ \ c)(d \ \ e \ \ f)$ und als $(a \ \ b \ \ c)(d \ \ f \ \ e)$. Wir bekommen also zunächst doppelt so viele solche Produkte, wie es 3-Zyklen gibt. Nun haben wir aber de facto jede Permutation dieser Art *zweimal* erhalten, denn die Permutation $(a \ \ b \ \ c)(d \ \ e \ \ f)$ ergab sich sowohl aus dem 3-Zyklus $(a \ \ b \ \ c)$ als auch aus dem 3-Zyklus $(d \ \ e \ \ f)$! Also gibt es insgesamt doch nicht doppelt so viele, sondern nur ebensoviele Produkte dieser Form wie 3-Zyklen, und im Fall $k=3$ haben wir deren Anzahl schon als 40 bestimmt.
  - Es gibt ebensoviele Dreifachtranspositionen wie Möglichkeiten, die 6 Zahlen aus M in drei Zweierpäckchen zu verpacken. Um diese zu zählen, ist es am vielleicht am einfachsten, zunächst die „sortierten" Folgen von Zweierpäckchen zu zählen und die erhaltene Anzahl durch $3! = 6$ zu dividieren, weil uns die Reihenfolge nicht interessiert: das ergibt

    $$\frac{1}{6} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{15 \cdot 6 \cdot 1}{6} = 15$$

    Paarungsmöglichkeiten und ebensoviele Dreifachtranspositionen in S_6.

  Insgesamt ergibt diese Zählung $120 + 90 + 40 + 15 = 265$ fixpunktfreie Permutationen in S_6, das gleiche Ergebnis, wie wir es auch oben schon erhalten hatten.

Für Interessierte: Die allgemeine Bestimmung der Anzahl $F(n,k)$ aller Permutationen in S_n mit genau k Fixpunkten.

Unser kombinatorischer Ansatz, zunächst alle möglichen Zyklusdarstellungen einer Permutation in S_n mit genau k Fixpunkten zu ermitteln und dann ihre Anzahl zu bestimmen, wird für größere Werte von n schnell unübersichtlich. Es lohnt sich, ein systematischeres Verfahren zu suchen.

Die Grundidee ist: Wie viele dieser Permutationen haben die Zahl n als Fixpunkt? Darauf gibt es zwei Antworten:

a) Ihr Anteil unter *allen* Permutationen in S_n mit genau k Fixpunkten entspricht genau genau dem Anteil der möglichen k-elementigen „Fixpunktmengen", die n enthalten, unter *allen* k-elementigen Fixpunktmengen, also

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)! \cdot k!}{n! \cdot (k-1)!} = \frac{k}{n}.$$

b) Die Anzahl derjenigen Permutationen in S_n, die genau k-Fixpunkte haben, *und* für die n einer dieser Fixpunkte ist, entspricht genau der Anzahl derjenigen Permutationen in S_{n-1}, die genau $k-1$ Fixpunkte haben.

Beide Beobachtungen zusammen liefern die Formel:

$$\frac{k}{n} \cdot F(n,k) = F(n-1,k-1) \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

Durch Auflösen dieser Beziehung nach $F(n,k)$ erhalten wir eine rekursive Berechnungsmöglichkeit für die Zahlen $F(n,k)$. Dabei fehlt noch der Fall $k=0$; aber dieser läßt sich wegen

$$\sum_{k=0}^{n} F(n,k) = |S_n| = n!$$

auf den Fall $k > 0$ zurückführen, so daß wir insgesamt die folgende rekursive Formel für $F(n,k)$ für alle $0 \leq k \leq n$ erhalten:

$$F(n,k) = \begin{cases} \dfrac{n}{k} \cdot F(n-1,k-1) & \text{falls } k \geq 1, \\[2ex] n! - \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} F(n,\ell) & \text{falls } k = 0. \end{cases}$$

Damit erhalten wir die folgende Tabelle, in der sich jeder Eintrag (außer dem jeweils ersten einer Zeile) gemäß der Rekursionsformel aus dem links oben von ihm stehenden ergibt, und der erste Eintrag jeder Zeile aus der Bedingung, daß die Summe der Einträge der n-ten Zeile stets $n!$ sein soll:

1							
0	1						
1	0	1					
2	3	0	1				
9	8	6	0	1			
44	45	20	10	0	1		
265	264	135	40	15	0	1	
1854	1855	924	315	70	21	0	1

An dieser Tabelle kann man viele Gesetzmäßigkeiten entdecken; beispielsweise scheinen sich die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen und diejenige derer mit genau einem Fixpunkt sich stets um genau 1 zu unterscheiden (wobei mal die eine, mal die andere größer ist). Wer findet eine Erklärung für dieses Phänomen?

Aufgabe 4.

a) Zuallererst ist zu zeigen, daß $\circ$ überhaupt eine sinnvolle Abbildung $A_n \times A_n \to A_n$ definiert: Gegeben $\sigma, \tau \in A_n$, so ist $\sigma \circ \tau$ sicher ein Element von S_n; aber liegt es auch in A_n? Dazu ist zu überprüfen, ob $\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) = 1$ gilt, aber ist ja

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \sigma(\tau) = 1 \cdot 1 = 1,$$

also ist alles in Ordnung.

Damit ist $\circ$ eine Verknüpfung auf A_n; sie ist assoziativ, weil sie es sowieso als Verknüpfung auf S_n ist. Ein neutrales Element haben wir sicher dann, wenn das neutrale Element id von S_n auch in der Menge A_n liegt: Aber es ist $\operatorname{sign}(\mathrm{id}) = 1$, also $\mathrm{id} \in A_n$. Ebenso ist die Existenz von inversen Elementen dann gesichert, wenn für jedes $\sigma \in A_n$ die inverse Permutation σ^{-1} nicht nur in S_n, sondern auch wieder in A_n liegt; wir müssen also überprüfen, ob aus $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ auch $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = 1$ folgt. Aber es ist $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}$ und damit

$$\begin{aligned} & \operatorname{sign}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\mathrm{id}) \\ \Longrightarrow\quad & \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\mathrm{id}) \\ \Longrightarrow\quad & 1 \cdot \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = 1 \\ \Longrightarrow\quad & \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = 1, \end{aligned}$$

also tatsächlich $\sigma^{-1} \in A_n$.

Damit ist $(A_n, \circ)$ tatsächlich eine Gruppe. Um die Frage nach ihrer Kommutativität zu untersuchen, betrachten wir die ersten Werte von n einzeln:

- Für $n = 1$ ist $S_1 = \{\mathrm{id}\} = A_1$, und eine Gruppe mit nur einem Element ist stets abelsch.
- Für $n = 2$ ist $S_2 = \{\mathrm{id}, (1\ \ 2)\}$ und damit $A_2 = \{\mathrm{id}\}$ – also ist A_2 ebenfalls abelsch.
- Für $n = 3$ ist $S_3 = \{\mathrm{id}, (1\ \ 2), (1\ \ 3), (2\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\}$ und damit

  $$A_3 = \{\mathrm{id}, (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\}\,.$$

  Diese Gruppe ist tatsächlich abelsch! Und das sieht man so: Es ist zu überprüfen, ob für $\sigma, \tau \in A_3$ stets gilt $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. Ist $\sigma = \mathrm{id}$ oder $\tau = \mathrm{id}$, so ist das klar; ebenso ist es klar für $\sigma = \tau$. Also bleibt nur der Fall $\sigma = (1\ \ 2\ \ 3)$ und $\tau = (1\ \ 3\ \ 2)$ (oder umgekehrt, aber das ist die gleiche Frage) zu überprüfen, aber es ist

  $$(1\ \ 2\ \ 3)(1\ \ 3\ \ 2) = \mathrm{id} = (1\ \ 3\ \ 2)(1\ \ 2\ \ 3),$$

  wie behauptet.

  Wenn wir erst mehr Gruppentheorie kennen, können wir viel einfacher argumentieren: Beispielsweise ist eine Gruppe stets abelsch, wenn die Anzahl ihrer Elemente eine Primzahl ist; dies trifft für A_3 mit $|A_3| = 3$ zu.

- Für $n = 4$ behaupte ich, daß die Elemente $(1\ \ 2\ \ 3)$ und $(1\ \ 2\ \ 4)$ von A_4 nicht miteinander vertauschbar sind: Denn es ist

  $$\begin{aligned} &(1\ \ 2\ \ 3)(1\ \ 2\ \ 4) = (1\ \ 3)(2\ \ 4) \\ \text{und}\quad &(1\ \ 2\ \ 4)(1\ \ 2\ \ 3) = (1\ \ 4)(2\ \ 3), \end{aligned}$$

  also $(1\ \ 2\ \ 3)(1\ \ 2\ \ 4) \neq (1\ \ 2\ \ 4)(1\ \ 2\ \ 3)$, und damit ist A_4 nicht abelsch. Aber dieses Argument gibt noch viel mehr her: Denn die gleiche Rechnung können wir in *jedem* A_n für $n \geq 4$ durchführen, also haben wir gezeigt, daß A_n für $n \geq 4$ *niemals* abelsch ist.

Also ist die Gruppe $(A_n, \circ)$ genau für $n = 1, 2, 3$ abelsch.

b) Zunächst liefert die Vorschrift $\sigma \mapsto f(\sigma) := \sigma \circ (1\ \ 2)$ tatsächlich eine sinnvolle Abbildung $A_n \to S_n \setminus A_n$, denn ist $\sigma \in A_n$, so ist $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$, also $\mathrm{sign}(f(\sigma)) = \mathrm{sign}(\sigma \circ (1\ \ 2)) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}((1\ \ 2)) = +1 \cdot (-1) = -1$, also folgt $f(\sigma) \in S_n \setminus A_n$.

Die Abbildung f ist **injektiv**, weil aus $f(\sigma) = f(\tau)$, also $\sigma \circ (1\ \ 2) = \tau \circ (1\ \ 2)$, durch „Multiplikation“ mit $(1\ \ 2)^{-1} = (1\ \ 2)$ von rechts folgt $\sigma = \tau$.

Die Abbildugn f ist **surjektiv**, weil für gegebenes $\tau \in S_n \setminus A_n$ die Permutation $\sigma := \tau \circ (1\ \ 2)$ ein Urbild ist: Denn zunächst ist, da ja $\mathrm{sign}(\tau) = -1$ ist, $\mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\tau \circ (1\ \ 2)) = \mathrm{sign}(\tau) \circ \mathrm{sign}((1\ \ 2)) = (-1) \circ (-1) = +1$, also $\sigma \in A_n$. Damit dürfen wir den Ausdruck $f(\sigma)$ hinschreiben, und er berechnet sich zu

$$f(\sigma) = \sigma \circ (1\ \ 2) = \tau \circ (1\ \ 2) \circ (1\ \ 2) = \tau,$$

also ist σ tatsächlich das gewünschte Urbild von τ. Damit ist die Bijektivität von f bewiesen.

Da wir nun eine bijektive Abbildung $A_n \to S_n \setminus A_n$ haben, folgt insbesondere $|A_n| = |S_n \setminus A_n|$, also

$$\begin{aligned} &|A_n| = |S_n| - |A_n| \\ \Longrightarrow\quad &2\,|A_n| = |S_n| \\ \Longrightarrow\quad &|A_n| = \frac{1}{2}\,|S_n| = \frac{n!}{2}. \end{aligned}$$

Die „alternierende Gruppe“ A_n enthält also genau halb so viele Elemente wie die symmetrische Gruppe S_n; anders gesagt: von den $n!$ Elementen in S_n hat genau jeweils die Hälfte positives und negatives Vorzeichen.