Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I – 13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Kombinatorik). Seien M und N Mengen mit $|M| = 4$ und $|N| = 7$. Man bestimme die Anzahl

a) der injektiven bzw. surjektiven Abbildungen $f : M \to N$.

b) der injektiven bzw. surjektiven Abbildungen $f : N \to M$.

Aufgabe 2 (Permutationen). In der symmetrischen Gruppen S_8 seien die beiden Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man berechne σ^{2014} sowie σ^{-1} und τ^{-1}.

b) Man bestimme α und $\beta \in S_8$ mit $\sigma \circ \alpha = \tau$ und $\beta \circ \sigma = \tau$.

c) Man stelle σ und τ als Produkt von Transpositionen dar und bestimme $\operatorname{sign}(\sigma)$ und $\operatorname{sign}(\tau)$. Gibt es ein $\psi \in S_8$ mit $\sigma \circ \psi = \psi \circ \tau$?

Aufgabe 3 (Fixpunkte von Permutationen). Man bestimme die Anzahl der Permutationen in S_6 mit genau k Fixpunkten ($k = 0, \ldots, 6$).

Aufgabe 4 (Die alternierende Gruppe). Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $A_n \subset S_n$ die Teilmenge aller *geraden* Permutationen, also $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$.

a) Man zeige, daß $(A_n, \circ)$ eine Gruppe ist. (Man nennt A_n die *alternierende Gruppe*.)
Für welche n ist A_n abelsch?

b) Man zeige, daß für $n \geq 2$ durch

$$\sigma \mapsto \sigma \circ (1 \;\; 2)$$

eine bijektive Abbildung $f : A_n \to S_n \setminus A_n$ definiert wird, und berechne damit die Mächtigkeit $|A_n|$ von A_n.

Keine Abgabe und Korrektur. Die Aufgaben werden in der Zentralübung am 6. Februar 2014 besprochen.