Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1. Das Prinzip der vollständigen Induktion läßt sich beispielsweise folgendermaßen formulieren[1]:

> *Ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage, und gelten die beiden Aussagen*
> $$A(1) \quad \textit{und} \quad \forall n \geq 2 \ : \ (A(n-1) \Longrightarrow A(n))\,,$$
> *so gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Um dieses Prinzip zum Beweis der behaupteten Gleichung anzuwenden, erklären wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ durch

$$A(n) \ : \ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \, \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zum Beweis der Aussage $A(1)$ (**Induktionsanfang**) schreiben wir sie aus

$$A(1) \ : \ \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} k^2 \stackrel{?}{=} (-1)^{1+1} \, \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

und berechnen beide Seiten der behaupteten Gleichung: Die linke Seite liefert $(-1)^2 \cdot 1^2 = 1$, die rechte Seite $(-1)^2 \, \frac{2}{2} = 1$, also stimmen beide Seiten tatsächlich überein.
Für den **Induktionsschritt** $n-1 \to n$ sei $n \geq 2$ fest und die Aussage $A(n-1)$ bereits bewiesen (**Induktionsvoraussetzung**), also

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n} \, \frac{(n-1)n}{2}.$$

Zu beweisen ist, daß dann auch

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \, \frac{n(n+1)}{2}$$

[1] Wie man sieht, entscheide ich mich wieder einmal für die Variante mit dem Induktionsschritt $n-1 \to n$; mathematisch ist es egal, ob ich diese nehme oder diejenige aus der Vorlesung mit dem Induktionsschritt $n \to n+1$, aber da die rechte Seite der in dieser Aufgabe zu beweisenden Gleichung den Faktor n enthält, ist – Faustregel! – diese Version des Induktionsprinzips nützlich.

gilt. Aber es ist

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}k^2\right) + (-1)^{n+1}n^2 \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\
&= (-1)^n\ \frac{(n-1)n}{2} + (-1)^{n+1}n^2 \\
&= (-1)^{n+1}\left(n^2 - \frac{(n-1)n}{2}\right) = (-1)^{n+1}\ \frac{2n^2-n^2+n}{2} \\
&= (-1)^{n+1}\ \frac{n^2+n}{2} = (-1)^{n+1}\ \frac{n(n+1)}{2},
\end{aligned}
$$

und wir sind fertig.

Aufgabe 2. Für den **Induktionsanfang** $n = 2$ ist

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = 1 - \frac{2}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

sowie

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{2}\right) = \frac{2}{3},$$

so daß die Behauptung stimmt. Für den **Induktionsschritt** $n \to n+1$ sei $n \geq 2$ und bereits bewiesen, daß

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

gilt (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist, daß dann auch

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$

gilt, aber es ist

$$
\begin{aligned}
&\prod_{k=2}^{n+1}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2(n+1)(n+2)-2n-4}{n(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2n^2+6n+4-2n-4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2n^2+4n}{n(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{(n+1)}\right),
\end{aligned}
$$

wie behauptet.

Aufgabe 3. Um eine Vermutung für eine explizite Darstellung der Folge (a_n) zu erhalten, berechnen wir ihre ersten Glieder zu Fuß: Es ist

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \\
a_2 &= \frac{2a_1}{2+a_1} = \frac{2\cdot 1}{2+1} = \frac{2}{3}, \\
a_3 &= \frac{2a_2}{2+a_2} = \frac{2\cdot \frac{2}{3}}{2+\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}, \\
a_4 &= \frac{2a_3}{2+a_3} = \frac{2\cdot \frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Bis hierhin erkenne ich noch keine Regelmäßigkeit. Rechnen wir also weiter:

$$\begin{aligned}
a_5 &= \frac{2a_4}{2+a_4} = \frac{2\cdot \frac{2}{5}}{2+\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}, \\
a_6 &= \frac{2a_5}{2+a_5} = \frac{2\cdot \frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}} = \frac{2}{7}, \\
a_7 &= \frac{2a_6}{2+a_6} = \frac{2\cdot \frac{2}{7}}{2+\frac{2}{7}} = \frac{1}{4}, \\
a_8 &= \frac{2a_7}{2+a_7} = \frac{2\cdot \frac{1}{4}}{2+\frac{1}{4}} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Jetzt (spätestens) kann man einige Gesetzmäßigkeiten erkennen – beispielsweise, daß die Zähler der Brüche jeweils abwechselnd 1 und 2 sind. Ganz augenfällig wird die Struktur, wenn wir die Brüche so erweitern, daß sie *alle* als Zähler 2 haben:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$

Jetzt kommen wir sofort zur **Vermutung**, daß $a_n = \frac{2}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Diese versuchen wir nun mittels vollständiger Induktion zu beweisen.
Den **Induktionsanfang** $n = 1$ können wir uns inzwischen eigentlich sparen, da ja unsere Vermutung so gebaut ist, daß sie für $n = 1, 2, \ldots, 8$ auf jeden Fall stimmt. Fürs Protokoll vermerken wir trotzdem, daß $a_1 = 1 = \frac{2}{1+1}$ gilt.
Für den **Induktionsschritt** $n \to n+1$ nehmen wir an, daß für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bereits bekannt ist, daß $a_n = \frac{2}{n+1}$ ist (**Induktionsvoraussetzung**). Zu beweisen ist nun, daß dann auch $a_{n+1} = \frac{2}{(n+1)+1} = \frac{2}{n+2}$ gilt. Aber es ist nach der rekursiven Definition der Folge (a_n)

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{2a_n}{2+a_n} \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung verwenden)} \\
&= \frac{2\cdot \frac{2}{n+1}}{2+\frac{2}{n+1}} = \frac{4}{2(n+1)+2} = \frac{4}{2n+4} \\
&= \frac{2}{n+2},
\end{aligned}$$

wie behauptet. Nach dem Induktionsprinzip ist damit unsere Vermutung bewiesen, d.h. es ist $a_n = \frac{2}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4. Für den **Induktionsanfang** $n = 0$ lautet die Behauptung: Ist $|M| = 0$, also M die leere Menge, so ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^0 = 1$. Dies ist korrekt, denn es ist $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ mit genau einem Element.
Für den **Induktionsschritt** $n \to n+1$ sei $n \in \mathbb{N}_0$ und schon bewiesen, daß die Potenzmenge einer n-elementigen Menge 2^n Elemente besitzt. Sei nun M eine Menge mit $|M| = n+1$. Wie im Hinweis vorgeschlagen, fixieren wir ein Element $x \in M$ (dies geht, da $n + 1 > 0$ ist und M deshalb nicht leer ist!) und machen nun einige Beobachtungen:

a) Es gibt genausoviele Teilmengen von M, die x enthalten, wie Teilmengen, die x *nicht enthalten*; formal gesagt: die Teilmengen

$$\mathcal{A} := \{X \in \mathcal{P}(M) \,|\, x \in X\} \subset \mathcal{P}(M) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} := \{Y \in \mathcal{P}(M) \,|\, x \notin Y\} \subset \mathcal{P}(M)$$

haben die gleiche Mächtigkeit.

Denn aus einer Teilmenge X des ersten Typs kann man eine Teilmenge $X \cup \{x\}$ des zweiten Typs machen, und aus einer Teilmenge Y des zweiten Typs eine Teilmenge $Y \setminus \{x\}$ des ersten Typs, und beide Vorgänge sind invers zueinander.

Für einen formalen Beweis geben wir zueinander inverse (also bijektive) Abbildungen $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ an durch die Vorschrift $f(X) := X \cup \{x\}$ und $g(Y) := Y \setminus \{x\}$. Beides sind zulässige Abbildungen, da sie nach Definition Teilmengen des „richtigen“ Typs hervorbringen. Nun gilt aber

$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(X \cup \{x\}) = (X \cup \{x\}) \setminus \{x\} = X$$

für alle $X \in \mathcal{A}$ (beachte, daß $x \notin X$ gilt!) sowie

$$(f \circ g)(Y) = f(g(Y)) = f(Y \setminus \{x\}) = (Y \setminus \{x\}) \cup \{x\} = Y$$

für alle $Y \in \mathcal{B}$ (beachte, daß $x \in Y$ gilt). Also ist $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, d.h. f und g sind invers zueinander, also jeweils bijektiv, und das zeigt $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.

b) Es ist $|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$.

Denn jede Teilmenge von M enthält entweder das Element x, oder sie enthält es nicht, d.h. jedes Element von $\mathcal{P}(M)$ liegt *entweder* in $\mathcal{A}$ *oder* in $\mathcal{B}$. Formal bedeutet das $\mathcal{P}(M) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, und daraus folgt

$$|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - |\underbrace{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}_{=\emptyset}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|\,.$$

c) Es ist $\mathcal{B} = \mathcal{P}(M \setminus \{x\})$ nach Definition, und wegen $|M \setminus \{x\}| = |M| - 1 = n$ folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{P}(M \setminus \{x\})| = 2^n.$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$|\mathcal{P}(M)| \overset{\text{b)}}{=} |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| \overset{\text{a)}}{=} 2 \cdot |\mathcal{B}| \overset{\text{c)}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

so daß der Induktionsschritt beendet ist.