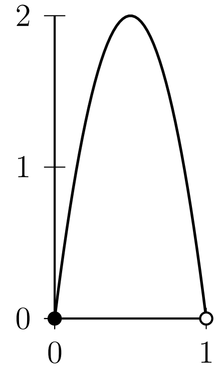
Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 8. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

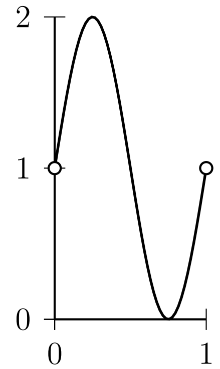
a) Der Trick ist, die Funktion den Wert 2 nicht gerade am *Rand* des Definitionsbereichs annehmen zu lassen, also etwa so:



Dies ist im übrigen der Graph der Funktion

$$f : [0, 1[\to [0, 2], \quad x \mapsto 2 - 8 \cdot (x - \frac{1}{2})^2 = 8 \cdot (x - x^2).$$

b) Hier müssen wir die Funktion sowohl den Wert 0 als auch den Wert 2 im Inneren des Definitionsbereichs annehmen lassen:

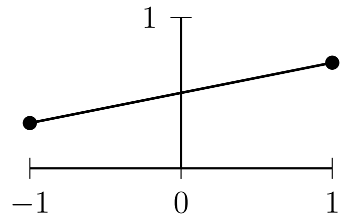


Konkret habe ich hier die Funktion

$$g :]0, 1[\to [0, 2], \quad x \mapsto 1 + \sin(2\pi \cdot x)$$

genommen.

c) Hier kann man die Funktion einfach „genügend viele" Werte aus der Zielmenge gar nicht nicht annehmen lassen:



Hier habe ich die Funktion

$$h : [-1,1] \to]0,1[, \quad x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{x}{5}$$

genommen (der Nenner 5 wurde gewählt, weil dann das Bild besonders schön wird; im Prinzip funktioniert jeder reelle Nenner > 2).

Aufgabe 2.

a) Beispielsweise liefert die Vorschrift $f(x) := 2x$ eine injektive Funktion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die nicht surjektiv ist. (Beweis der Injektivität: Aus $2x_1 = 2x_2$ folgt $x_1 = x_2$. Beweis der Nicht-Surjektivität: Nur f nimmt nur gerade Werte an, also beispielsweise nicht den Wert 1.)

b) Eine Möglichkeit ist eine Vorschrift wie

$$g(x) := \begin{cases} x-1 & \text{falls } x \geq 1, \\ x & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv (denn $g(1) = 0 = g(0)$), aber surjektiv (für $y \geq 0$ ist $g(y+1) = y$, für $y \leq 0$ ist $g(y) = y$).

Eine andere Möglichkeit ist Verwendung des Abrundeoperators; ich erinnere daran, daß $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq a$ bezeichnet: Die Vorschrift

$$g(x) := \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

liefert eine Funktion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die surjektiv ist (für jedes $y \in \mathbb{Z}$ ist $g(2y) = y$), jedoch nicht injektiv (es ist $g(0) = 0 = g(1)$).

Aufgabe 3. Wir suchen zu beliebig vorgegebenem $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ein Paar $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f(x,y) = (a,b)$. Aber es gilt

$$\begin{aligned}
& f(x,y) = (a,b) \\
\iff\ & (3x-4y, 4x-5y) = (a,b) \\
\iff\ & (3x-4y = a) \ \wedge\ (4x-5y = b) \quad \text{(erste von zweiter Gleichung abziehen)} \\
\iff\ & (3x-4y = a) \ \wedge\ (x-y = b-a) \quad \text{(zweite dreifach von erster Gleichung abziehen)} \\
\iff\ & (-y = 4a-3b) \ \wedge\ (x-y = b-a) \\
\iff\ & (y = 3b-4a) \ \wedge\ (x = 4b-5a),
\end{aligned}$$

also ist $(x,y) := (4b-5a, 3b-4a)$ ein solches Paar (das ist die Richtung „$\Longleftarrow$“ in der obigen Rechnung), und zwar das einzig mögliche (das ist die Richtung „$\Longrightarrow$“). Ersteres zeigt, daß f surjektiv ist, zweiteres, daß f injektiv ist, und zwar ist $f^{-1}(a,b) = (4b-5a, 3b-4a)$.

Aufgabe 4. Um die störenden Betragsstriche in der Definition von f zu umgehen, betrachten wir zwei Einschränkungen von f, nämlich

$$f_+ : \mathbb{R}_0^+ \to [0,1[, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}$$

sowie

$$f_- : \mathbb{R}^- \to]-1,0[, \quad f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Es gilt also $f(x) = f_+(x)$ für alle $x \geq 0$ und $f(x) = f_-(x)$ für alle $x < 0$. Man beachte auch die angegebenen Zielmengen von f_+ und f_-, die kleiner gewählt wurden als diejenige von f (aber immer noch zulässige Abbildungen ergeben!).
Ich behaupte, daß sowohl f_+ als auch f_- bijektiv sind. Was das mit der Bijektivität von f zu tun hat, darum kümmern wir uns später; beweisen wir erst einmal diese Behauptung. Dazu verfahren wir genau wie in Aufgabe 3.

- Zu beliebig vorgegebenem $y \in [0,1[$ suchen wir ein $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $y = f_+(x)$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} & f_+(x) = y \\ \iff\quad & \frac{x}{1+x} = y \\ \iff\quad & x = y \cdot (1+x) \\ \iff\quad & x \cdot (1-y) = y \\ \iff\quad & x = \frac{y}{1-y}. \end{aligned}$$

  Da $\frac{y}{1-y}$ für $y \in [0,1[$ tatsächlich in $\mathbb{R}_0^+$ liegt, folgt genau wie in Aufgabe 3 aus dieser Rechnung, daß f_+ bijektiv ist, und daß

$$f_+{}^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$$

  gilt.

- Zu beliebig vorgegebenem $y \in]-1,0[$ suchen wir ein $x \in \mathbb{R}^-$ mit $y = f_-(x)$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} & f_-(x) = y \\ \iff\quad & \frac{x}{1-x} = y \\ \iff\quad & x = y \cdot (1-x) \\ \iff\quad & x \cdot (1+y) = y \\ \iff\quad & x = \frac{y}{1+y}. \end{aligned}$$

  Da $\frac{y}{1+y}$ für $y \in]-1,0[$ tatsächlich in $\mathbb{R}^-$ liegt, folgt wie vorhin, daß f_- bijektiv ist, und daß

$$f_-{}^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$$

  gilt.

Was folgt daraus nun über die Funktion f?
Die **Surjektivität** von f folgt tatsächlich aus der Surjektivität von f_+ und f_-, denn f trifft nun die ganze Menge $[0,1[\ \cup\ ]-1,0[\ =\ ]-1,1[$, was zu zeigen war.
Für die **Injektivität** von f ist dagegen die Injektivität sowohl von f_+ als auch von f_- zwar *notwendig*, jedoch nicht *hinreichend*.[1] Hier müssen wir etwas mehr arbeiten; der entscheidende Punkt ist die Beobachtung, daß die Zielmengen von f_+ und f_- leeren Schnitt haben. Im einzelnen geht das Argument so:
Sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, so gibt es mehrere Möglichkeiten: Liegen x_1, x_2 beide in $\mathbb{R}_0^+$ oder beide in $\mathbb{R}^-$, so folgt $x_1 = x_2$ wegen der Injektivität von f_+ bzw. f_-. Der Fall, daß $x_1 \in \mathbb{R}_0^+$ und $x_2 \in \mathbb{R}^-$ gilt (oder umgekehrt), kann aber nicht eintreten: Denn dann wäre $f(x_1) = f_+(x_1) \in [0,1[$

[1] Man mache sich das klar anhand der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, die sicher nicht injektiv ist, jedoch injektive Einschränkungen auf $\mathbb{R}_0^+$ und $\mathbb{R}^-$ hat.

und $f(x_2) = f_-(x_2) \in\ ]-1,1[$, was wegen $f(x_1) = f(x_2)$ nicht sein kann. – Also ist in jedem Fall $x_1 = x_2$, d.h. f ist injektiv.
Insgesamt ist also f bijektiv, und es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \begin{cases} \dfrac{y}{1-y} & \text{falls } y \in [0,1[, \\ \dfrac{y}{1+y} & \text{falls } y \in\ ]-1,0[\end{cases} \\ &= \frac{y}{1-|y|} \quad \text{für alle } y \in\ ]-1,1[. \end{aligned}$$

Man kann auch direkt so wie in Aufgabe 3 verfahren und die (wohl unvermeidliche) Fallunterscheidung etwas später vornehmen. Das sieht dann so aus:

Zu beliebig vorgegebenem $y \in\ ]-1,1[$ suchen wir $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$. Aber es gilt

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \iff\ & \frac{x}{1+|x|} = y \\ \iff\ & x = y \cdot (1+|x|). \end{aligned}$$

Wie sich diese Äquivalenzenkette (die für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in\ ]-1,1[$ gilt) weiter umformen läßt, hängt vom Vorzeichen von x ab:

$$\begin{aligned} \ldots \iff\ & (x \geq 0\ \wedge\ x = y \cdot (1+x))\ \vee\ (x \leq 0\ \wedge\ x = y \cdot (1-x)) \\ \iff\ & (x \geq 0\ \wedge\ x \cdot (1-y) = y)\ \vee\ (x \leq 0\ \wedge\ x \cdot (1+y) = y) \\ \iff\ & \left(x \geq 0\ \wedge\ x = \frac{y}{1-y}\right)\ \vee\ \left(x \leq 0\ \wedge\ x = \frac{y}{1+y}\right) \end{aligned}$$

In beiden Teilausdrücken kann man nun $x \geq 0$ durch $y \geq 0$ (und $x \leq 0$ durch $y \leq 0$) ersetzen, denn die Gleichung $x = \frac{y}{1 \pm y}$ erzwingt wegen $1 \pm y > 0$, daß x und y das gleiche Vorzeichen haben:

$$\begin{aligned} \ldots \iff\ & \left(y \geq 0\ \wedge\ x = \frac{y}{1-y}\right)\ \vee\ \left(y \leq 0\ \wedge\ x = \frac{y}{1+y}\right) \\ \iff\ & \left(y \geq 0\ \wedge\ x = \frac{y}{1-|y|}\right)\ \vee\ \left(y \leq 0\ \wedge\ x = \frac{y}{1-|y|}\right) \\ \iff\ & x = \frac{y}{1-|y|}. \end{aligned}$$

Genau wie in Aufgabe 3 zeigt nun die Richtung „$\Longleftarrow$“, daß f surjektiv ist, und die Richtung „$\Longrightarrow$“, daß f injektiv ist, und insgesamt ist für alle $y \in\ ]-1,1[$

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

(Übrigens hat die Aufgabe auch eine Moral, nämlich die – durchaus ein wenig überraschende – Existenz einer Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $]-1,1[$!)