

## Grundlagen der Mathematik I – 4. Tutoriumsblatt

### Aufgabe 1 (Summen- und Produktzeichen).

a) Für  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  bestimme man

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^n \frac{2k}{k+1}.$$

b) Man schreibe

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{99}{100} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \dots \cdot \frac{50}{149}$$

mit Hilfe des Summen- bzw. Produktzeichens.

c) Man bestimme

$$\prod_{k=1}^{99} \frac{k}{k+1}.$$

### Aufgabe 2 (Quadratische Gleichungen in Körpern). Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Man zeige:

a) Für  $a, b, c, d \in K$  sind äquivalent:

- (i) Es ist  $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$  für alle  $x \in K$ .
- (ii) Es ist  $a = c$  und  $b = d$ .

b) Für  $a, b, s, t \in K$  sind äquivalent:

- (i) Es ist  $x^2 + ax + b = (x + s)(x + t)$  für alle  $x \in K$ .
- (ii) Es ist  $a = s + t$  und  $b = s \cdot t$ .

c) Man löse für  $K = \mathbb{Q}$  die Gleichung  $x^2 + 5x - 24 = 0$  mittels b).

### Aufgabe 3 (Rechenregeln für Brüche). Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Man zeige für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$ :

a)  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$

b)  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$

### Aufgabe 4 (Lösen von Gleichungen). Man bestimme die Elemente der Menge

$$L = \left\{ x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0\} \mid \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2} \right\}.$$