MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Moser

WS 2013/14
Blatt 2
30.10.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. a) Die Negation von $(*)$ lautet:

$$\exists x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0, \quad \text{mit} \quad x^2 \leq y^2 \quad \wedge \quad x > y$$

b) Die Aussage

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad \text{gilt} \quad \left[x^2 \leq y^2 \quad \Longrightarrow \quad x \leq y\right]$$

ist falsch, denn es gilt z.B. für $x = 2, y = -3$, daß $x^2 = 4 \leq 9 = y^2$ und jedoch $x = 2 > -3 = y$.
Damit haben wir gezeigt, daß die Negation

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x^2 \leq y^2 \quad \wedge \quad x > y$$

wahr ist.

c) Seien $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& 0 \leq (a-b)^2 \\
\Longrightarrow\quad & 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\
\Longrightarrow\quad & 2ab \ \leq\ a^2 + b^2 \\
\Longrightarrow\quad & 4ab \ \leq\ a^2 + 2ab + b^2 \\
\Longrightarrow\quad & 4ab \ \leq\ (a+b)^2 \\
\Longrightarrow\quad & ab \ \leq\ \frac{(a+b)^2}{4} \\
\Longrightarrow\quad & ab \ \leq\ \frac{(a+b)^2}{2^2} \\
\Longrightarrow\quad & (\sqrt{ab})^2 \ \leq\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
\overset{(*)}{\Longrightarrow}\quad & \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

Da $0 \leq (a-b)^2$ eine wahre Aussage ist, und lauter korrekte Schlüsse durchgeführt wurden (man beachte für die Anwendung von $(*)$, daß sowohl $\sqrt{ab} \geq 0$ als auch $\frac{a+b}{2} \geq 0$, da $a, b \geq 0$), gilt also für alle $a, b > 0$, daß $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

2. a) Sei $z \in \mathbb{Z}$ und gelte z ist ungerade. Zu zeigen ist: z^2 ist auch ungerade.
Weil $z \in \mathbb{Z}$ ungerade, gibt es nach Definition 1.13 b) ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = 2k + 1$. Es folgt dann mit Hilfe der Binomischen Formel

$$z^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1.$$

Damit ist z^2 nach Definition 1.13 b) ungerade.

Auch folgende Kurzversion des Beweises wird akzeptiert:

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und gelte z ist ungerade.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Def. 1.13b)}}{\Longrightarrow} && \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; z = 2k+1 \\ &\Longrightarrow && z^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1 \\ &\overset{\text{Def. 1.13b)}}{\Longrightarrow} && z^2 \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

b) Wir zeigen die zu b) äquivalente Aussage

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \;:\; \left[\neg A(z) \implies \neg B(z)\right]$$

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und gelte z ist nicht ungerade, also gerade. Zu zeigen ist: z^2 ist auch gerade.
Weil $z \in \mathbb{Z}$ gerade, gibt es nach Definition 1.13 a) ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = 2k$. Es folgt dann mit Hilfe der Binomischen Formel

$$z^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}}).$$

Damit ist z^2 nach Definition 1.13 a) gerade.

Auch folgende Kurzversion des Beweises wird akzeptiert:

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und gelte z ist gerade.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Def. 1.13a)}}{\Longrightarrow} && \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; z = 2k \\ &\Longrightarrow && z^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}}) \\ &\overset{\text{Def. 1.13a)}}{\Longrightarrow} && z^2 \text{ ist gerade.} \end{aligned}$$

3. a) Mit der Menge M aller Menschen und der Menge S aller Sprachen sowie der Schreibweise „$V(x,y) : x$ versteht y" ergibt sich formal:

$$\text{P} \quad \forall x \in M \quad \exists y \in S : V(x,y) \quad \text{und} \quad \text{Q} \quad \exists y \in S \quad \forall x \in M : V(x,y)$$

b) Es gilt Q $\implies$ P: die gemäß Q existierende „Universalsprache" $y \in S$, die jeder $x \in M$ versteht, kann in P für jedes $x \in M$ als „Individualsprache" $y \in S$ fungieren; dagegen kann nicht P $\implies$ Q geschlossen werden: jeder Mensch $x \in M$ kann ja eine andere Sprache $y \in S$ verstehen. Damit ist Aussage P zwar notwendig, aber nicht hinreichend für Aussage Q.

c) Für die Negationen der beiden Aussagen ergibt sich

$$\neg\text{P}\ \exists x \in M \quad \forall y \in S : \neg V(x,y) \quad \text{und} \quad \neg\text{Q}\ \forall y \in S \quad \exists x \in M : \neg V(x,y)$$

mit der sprachlichen Umsetzung
¬ P : „Es gibt einen Menschen, der keine Sprache versteht."
¬ Q : „Zu jeder Sprache gibt es einen Menschen, der diese nicht versteht."

d) Es gilt ¬P $\Longrightarrow$ ¬Q: der gemäß ¬P existierende „Sprachlose" $x \in M$, der alle $y \in S$ nicht versteht, kann in ¬Q für jedes $y \in S$ als „Nichtsprecher" $x \in M$ fungieren; dagegen kann nicht ¬Q $\Longrightarrow$ ¬P geschlossen werden: jede Sprache $y \in S$ kann ja von einem anderen Menschen $x \in M$ nicht verstanden werden. Damit ist Aussage ¬P zwar hinreichend, aber nicht notwendig für Aussage ¬Q.

4. Wir betrachten die beiden Mengen $A = \{a, 1, x^2\}$ und $B = \{x, 5, 7\}$ mit a, $x \in \mathbb{R}$.

a) Da

$$\begin{aligned} A \subset B &\Longrightarrow a \in \{x,5,7\} \ \wedge \ 1 \in \{x,5,7\} \\ &\Longrightarrow a \in \{x,5,7\} \ \wedge \ x = 1 \\ &\Longrightarrow a \in \{1,5,7\} \ \wedge \ x = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a \in \{1,5,7\} \ \wedge \ x = 1 &\Longrightarrow \big(A = \{1\} \ \vee \ A = \{1,5\} \ \vee \ A = \{1,7\}\big) \wedge \big(B = \{1,5,7\}\big) \\ &\Longrightarrow A \subset B \end{aligned}$$

ist also

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \{1,5,7\} \ \wedge \ x = 1.$$

Also ist die Aussage $A \subset B$ genau für $a \in \{1, 5, 7\}$ und $x = 1$ wahr.

b) Annahme, es gibt $a, x \in \mathbb{R}$ mit $A = B$. Dann ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} A = B \quad &\Longrightarrow \quad A \subset B \\ &\overset{\text{siehe a)}}{\Longrightarrow} \quad \Big(A = \{1\} \ \vee \ A = \{1,5\} \ \vee \ A = \{1,7\}\Big) \wedge \big(B = \{1,5,7\}\big) \\ &\Longrightarrow \quad A \neq B \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Also ist die Aussage $A = B$ für alle $a, x \in \mathbb{R}$ falsch.

c) Wegen

$$\begin{aligned} A \cup B = \{1,5,7,9\} \quad &\Longleftrightarrow \quad \big\{a, 1, x^2, x, 5, 7\big\} = \{1,5,7,9\} \\ &\Longleftrightarrow \quad a, x^2, x \in \{1,5,7,9\} \ \text{und}\ 9 \in \big\{a, x^2, x\big\} \\ &\Longleftrightarrow \quad a = 9 \ \text{und}\ x^2, x \in \{1,5,7,9\} \\ &\Longleftrightarrow \quad a = 9 \ \text{und}\ x = 1 \end{aligned}$$

ist die Aussage $A \cup B = \{1, 5, 7, 9\}$ genau für $a = 9$ und $x = 1$ wahr.