

## Grundlagen der Mathematik I – 2. Tutoriumsblatt

### Aufgabe 1.

- a) Man betrachte die folgende (wahre) Aussage (\*)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0 \quad \text{gilt} \quad [x^2 \leq y^2 \implies x \leq y] \quad (*)$$

und formuliere die Negation dieser Aussage (ohne Verwendung des logischen Zeichens  $\neg$ ).

- b) Man zeige, daß (\*) **ohne** die Einschränkung  $x, y \geq 0$  falsch ist.  
c) Man zeige die folgende Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0 \quad \text{gilt} \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Dabei dürfen (\*) sowie Schulkenntnisse (wie z.B. Definition und Eigenschaften der Wurzel, Bruchrechnung, Binomische Formeln, ...) verwendet werden.

### Aufgabe 2. Für eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ betrachte man die folgenden Aussagen:

$$A(z) : \text{„}z \text{ ist ungerade.“} \quad \text{und} \quad B(z) : \text{„}z^2 \text{ ist ungerade.“}$$

- a) Man zeige die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : [A(z) \implies B(z)]$$

durch einen direkten Beweis.

- b) Man zeige die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : [B(z) \implies A(z)]$$

durch einen indirekten Beweis.

### Aufgabe 3. Im folgenden werden die beiden Aussagen

$P$  : „Für jeden Menschen gibt es eine Sprache, die er versteht.“

$Q$  : „Es gibt eine Sprache, die jeder Mensch versteht.“

betrachtet.

- a) Man formalisiere die beiden Aussagen mit Hilfe logischer Verknüpfungen sowie der Abkürzung „ $V(x, y) : x$  versteht  $y$ “; dabei schreibe man  $M$  für die Menge aller Menschen und  $S$  für die Menge aller Sprachen.  
b) Man entscheide, ob die Aussage  $P$  hinreichend bzw. notwendig für die Aussage  $Q$  ist.  
c) Man bilde die Negationen  $\neg P$  und  $\neg Q$  der beiden Aussagen  $P$  und  $Q$  sprachlich wie formal.  
d) Man entscheide, ob die Aussage  $\neg P$  hinreichend bzw. notwendig für die Aussage  $\neg Q$  ist.

**Aufgabe 4.** Gegeben seien die Mengen  $A = \{a, 1, x^2\}$  und  $B = \{x, 5, 7\}$  mit  $a, x \in \mathbb{R}$ . Man überprüfe in Abhängigkeit von  $a, x \in \mathbb{R}$  die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitswert und begründe jeweils die Entscheidung.

a)  $A \subset B$

b)  $A = B$

c)  $A \cup B = \{1, 5, 7, 9\}$