Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 13. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) (i) Eine Verlosung der Zimmer würde so funktionieren, daß jeder der vier Touristen eine Kugel aus einer Urne zieht, wobei jede Kugel mit der Nummer eines Zimmers beschriftet ist (noch einfacher wäre es, direkt die Zimmerschlüssel aus einer Urne zu ziehen – das wird aber im Fall (ii) nicht mehr möglich sein). Dafür gibt es

$$\frac{7!}{(7-4)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

mögliche Ergebnisse (4-maliges Ziehen aus einer Urne mit 7 Kugeln ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge).

(ii) Wenn die Zimmer auch mehrfach belegt werden können, ändern sich die Spielregeln nur dahingehend, daß *mit* Zurücklegen gezogen wird. Die Anzahl der möglichen Ergebnisse ist dann $7^4 = 2401$ (4-maliges Ziehen aus einer Urne mit 7 Kugeln mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge)

b) Da für den Wirt die Touristen alle gleich aussehen (weil ihn nur die Anzahl von Gästen von Zimmer), ändert sich das Modell dahingehend, daß nun *ohne* Beachtung der Reihenfolge gezogen wird.

(i) Im Fall von Einfachbelegung der Zimmer gibt es nun

$$\binom{7}{4} = 35$$

mögliche Belegungen (4-maliges Ziehen aus einer Urne mit 7 Kugeln ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge).

(ii) Im Fall von möglicher Mehrfachbelegung gibt es nun

$$\binom{7+4-1}{4} = \binom{10}{4} = 210$$

mögliche Belegungen (4-maliges Ziehen aus einer Urne mit 7 Kugeln mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge).

Aufgabe 2.

a) Es ist

$$\begin{aligned}\sigma \circ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\tau \circ \sigma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&7&5&8&3&4&1&6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&1&3&7&8&2&4\end{pmatrix}\\&= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&2&5&1&6&7&8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(immer daran denken, die Komposition „von rechts nach links“ abzuarbeiten!). Außerdem ist

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&4&8&2&1&5&6\end{pmatrix}$$

und

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&1&5&6&3&8&2&4\end{pmatrix}$$

(Lesen der gegebenen Permutation „von unten nach oben“).

b) Das gelingt durch Auflösen: Es gilt $\sigma \circ \alpha = \tau \iff \alpha = \sigma^{-1} \circ \tau$, also tut

$$\begin{aligned}\alpha := \sigma^{-1} \circ \tau &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&4&8&2&1&5&6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&7&5&8&3&4&1&6\end{pmatrix}\\&= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&2&6&4&8&3&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

das Gewünschte. Ebenso gilt $\beta \circ \sigma = \tau \iff \beta = \tau \circ \sigma^{-1}$, also tut

$$\begin{aligned}\beta := \tau \circ \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&7&5&8&3&4&1&6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&4&8&2&1&5&6\end{pmatrix}\\&= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&8&6&7&2&3&4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

das Verlangte.

c) Um σ als Produkt von (sogar disjunkten) *Zyklen* zu schreiben, führt man das folgende Selbstgespräch:

> *Beginnen wir mit der* 1. *Es ist* $\sigma(1) = 6$*; die* 6 *geht weiter auf die* 8, *diese auf die* 4, *dann weiter auf die* 3, *und die* 3 *geht zurück auf die* 1. *Also notiere ich schon einmal den Zyklus* $(1\ 6\ 8\ 4\ 3)$.
> *Die erste noch nicht bearbeitete Zahl ist die* 2*; sie geht auf* $\sigma(2) = 5$, *die* 5 *weiter auf die* 7, *und die zurück auf die* 2. *Also notiere ich den Zyklus* $(2\ 5\ 7)$. *Jetzt habe ich alle Zahlen bearbeitet und bin fertig; die Lösung bekomme ich durch Komposition der erhaltenen Zyklen in beliebiger Reihenfolge:*
>
> $$\sigma = (1\ 6\ 8\ 4\ 3) \circ (2\ 5\ 7) = (2\ 5\ 7) \circ (1\ 6\ 8\ 4\ 3).$$

Um σ sogar als Produkt von *Transpositionen* zu schreiben, wendet man auf die schon gewonnene Darstellung als Produkt von Zyklen eine der Formeln aus der Vorlesung an, die Zyklen in Transpositionen zerlegen: Es ist

$$\begin{aligned}(1\ 6\ 8\ 4\ 3) &= (1\ 6) \circ (6\ 8) \circ (8\ 4) \circ (4\ 3)\\ \textit{oder:}\quad &= (1\ 3) \circ (1\ 4) \circ (1\ 8) \circ (1\ 6),\end{aligned}$$

und durch Verwendung einer ähnlichen Zerlegung für $(2\ \ 5\ \ 7)$ ergibt sich schließlich

$$\sigma = \underbrace{(1\ \ 6) \circ (6\ \ 8) \circ (8\ \ 4) \circ (4\ \ 3)}_{=(1\ \ 6\ \ 8\ \ 4\ \ 3)} \circ \underbrace{(2\ \ 5) \circ (5\ \ 7)}_{=(2\ \ 5\ \ 7)}$$

als eine von vielen verschiedenen möglichen Lösungen.

Das gleiche Spiel liefert für die Permutation τ zunächst

$$\tau = (1\ \ 2\ \ 7) \circ (3\ \ 5) \circ (4\ \ 8\ \ 6)$$

und damit beispielsweise

$$\tau = (1\ \ 2) \circ (2\ \ 7) \circ (3\ \ 5) \circ (4\ \ 8) \circ (8\ \ 6).$$

d) In c) haben wir gesehen, daß σ sich als Produkt von 6 Transpositionen schreiben läßt, also ist σ eine *gerade* Permutation, d.h. $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$.

   Ebenso ist τ als Produkt von 5 Transpositionen eine *ungerade* Permutation, d.h. $\operatorname{sign}(\tau) = -1$.

Aufgabe 3. Es wird nützlich sein, $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zu setzen. Wir schreiben eine Permutation $\sigma \in S_5$ als Produkt disjunkter Zyklen; dann sind

- die Fixpunkte von σ genau die Zahlen, die in dieser Darstellung in Form von 1-Zyklen auftauchen (die wir ja gewöhnlich nicht notieren, denn $(1) = (2) = \ldots = \mathrm{id}$),
- die Nicht-Fixpunkte von σ dagegen diejenigen Zahlen, die in dieser Darstellung in Zyklen der Länge ≥ 2 auftauchen.

Notieren wir alle Möglichkeiten, wie eine solche Darstellung als Produkt disjunkter Zyklen aussehen kann, in Abhängigkeit von der Anzahl k der Fixpunkte (dies wurde eigentlich auch schon in der Vorlesung durchgeführt!); dabei seien jeweils $a, b, c, d, e \in M$ paarweise verschieden:

- Im Fall $k = 0$ darf σ gar keine Fixpunkte haben, muß also nur disjunkten Zyklen der Länge ≥ 2 bestehen, die ganz M abdecken. Dafür gibt es nur die Möglichkeiten

$$\begin{array}{rll} & \sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e) & \text{(5-Zyklus)} \\ \text{oder} & \sigma = (a\ \ b) \circ (c\ \ d\ \ e) & \text{(ein 2-Zyklus und ein 3-Zyklus).} \end{array}$$

- Im Fall $k = 1$ enthält σ einen „1-Zyklus“ $(a) = \mathrm{id}$, alle anderen Zahlen aus M müssen in Zyklen der Länge ≥ 2 auftauchen. Dafür gibt es nur die Möglichkeiten $(b\ \ c\ \ d\ \ e)$ (ein 4-Zyklus) und $(b\ \ c) \circ (d\ \ e)$ (eine Doppeltransposition), also gilt

$$\begin{array}{rll} & \sigma = (a) \circ (b\ \ c\ \ d\ \ e) = (b\ \ c\ \ d\ \ e) & \text{(4-Zyklus)} \\ \text{oder} & \sigma = (a) \circ (b\ \ c) \circ (d\ \ e) = (b\ \ c) \circ (d\ \ e) & \text{(Doppeltransposition)} \end{array}$$

- Im Fall $k = 2$ enthält σ zwei „1-Zyklen“ $(a) \circ (b) = \mathrm{id}$, und die anderen Zahlen aus M müssen in Zyklen der Länge ≥ 2 auftauchen. Dafür bleibt nur die Möglichkeit $(c\ \ d\ \ e)$, also

$$\sigma = (a) \circ (b) \circ (c\ \ d\ \ e) = (c\ \ d\ \ e) \qquad \text{(3-Zyklus).}$$

- Im Fall $k = 3$ enthält σ drei „1-Zyklen“ $(a) \circ (b) \circ (c) = \mathrm{id}$; für die übrigen Zahlen bleibt dann nur die Möglichkeit, in einem 2-Zyklus zu stehen, also

$$\sigma = (a) \circ (b) \circ (c) \circ (d\ \ e) = (d\ \ e) \qquad \text{(2-Zyklus = Transposition).}$$

- Im Fall $k = 4$ enthält σ vier „1-Zyklen" $(a) \circ (b) \circ (c) \circ (d)$; dann bleibt für die fünfte Zahl e aber nur die Möglichkeit, ebenfalls in einem 1-Zyklus zu stehen – damit besitzt σ aber *fünf* Fixpunkte, d.h. der Fall $k = 4$ tritt nie ein!

- Im Fall $k = 5$ ist $\sigma = (a) \circ (b) \circ (c) \circ (d) \circ (e) = \mathrm{id}$, es gibt also nur eine Permutation mit dieser Eigenschaft.

In einem zweiten Schritt bestimmen wir nun die Anzahlen verschiedener Permutationen in jedem der oben untersuchten Fälle. Fangen wir von hinten an:

- Genau $k = 5$ Fixpunkte hat nur die Identität, also nur eine einzige Permutation.

- Genau $k = 4$ Fixpunkte kommen nicht vor.

- Genau $k = 3$ Fixpunkte haben die nur Transpositionen $(d \quad e)$. Da eine solche Transposition durch die Angabe ihrer „Trägermenge"[1] $\{d, e\}$ eindeutig bestimmt ist, gibt es genau $\binom{5}{2} = 10$ Transpositionen in S_5.

- Genau $k = 2$ Fixpunkte haben nur die 3-Zyklen $(c \quad d \quad e)$. Für die Trägermenge $\{c, d, e\}$ eines 3-Zyklus gibt es genau $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten. Es gibt aber immer genau zwei verschiedene 3-Zyklen mit identischer vorgegebener Trägermenge $\{c, d, e\}$, nämlich $(c \;\; d \;\; e)$ und $(c \;\; e \;\; d)$; damit gibt es insgesamt $2 \cdot 10 = 20$ verschiedene 3-Zyklen in S_5.

- Genau $k = 1$ Fixpunkt haben sowohl die 4-Zyklen $(b \;\; c \;\; d \;\; e)$ als auch die Doppeltranspositionen $(b \;\; c) \circ (d \;\; e)$, die wir einzeln zählen:

  - Zum Zählen der 4-Zyklen $(b \quad c \quad d \quad e)$ bemerken wir zunächst, daß es für die Trägermenge $\{b, c, d, e\}$ genau $\binom{5}{4} = 5$ Möglichkeiten gibt. Wieviele verschiedene 4-Zyklen mit der Trägermenge $\{b, c, d, e\}$ gibt es nun? Wir können den 4-Zyklus stets so schreiben, daß er die Form $(b \;\; ? \;\; ? \;\; ?)$ hat, also mit b beginnt. Für die nächste Zahl gibt es dann 3 Möglichkeiten, für die dritte noch 2, und die letzte ist dann festgelegt. Diese 4-Zyklen sind auch alle verschieden, daher gibt es $3! = 6$ verschiedene 4-Zyklen mit identischer Trägermenge $\{b, c, d, e\}$, und insgesamt sind es deshalb $6 \cdot 5 = 30$ 4-Zyklen in S_5.
  - Zum Zählen der Doppeltranspositionen $(b \quad c) \circ (d \quad e)$ bemerken wir, daß es für die Trägermenge $\{b, c, d, e\}$ auch hier $\binom{5}{4} = 5$ Möglichkeiten gibt. Mit fester Trägermenge $\{b, c, d, e\}$ gibt es aber nur drei verschiedene Doppeltranspositionen, nämlich $(b \;\; c) \circ (d \;\; e)$, $(b \;\; d) \circ (c \;\; e)$ und $(b \;\; e) \circ (c \;\; d)$. Also sind es insgesamt $5 \cdot 3 = 15$ Doppeltranspositionen in S_5.

  Zusammen haben wir also $30 + 15 = 45$ Permutationen mit genau einem Fixpunkt.

- Keinen einzigen Fixpunkt haben sowohl die 5-Zyklen $(a \quad b \quad c \quad d \quad e)$ als auch die Produkte $(a \;\; b) \circ (c \;\; d \;\; e)$ aus einem 2-Zyklus und einem 3-Zyklus.

  - Die Anzahl der 5-Zyklen $(a \quad b \quad c \quad d \quad e)$ ist, nach dem gleichen Argument, wie wir es zur Zählung der 4-Zyklen gebraucht haben, genau $4! = 24$ (beachte, daß es nur eine Trägermenge gibt, nämlich M selbst).
  - Die Anzahl der Produkte $(a \;\; b) \circ (c \;\; d \;\; e)$ ist identisch mit der Anzahl der 3-Zyklen, denn zu jedem 3-Zyklus erhalten wir eine Permutation der angegebenen Form, indem wir ihn mit derjenigen Transposition komponieren, die die beiden Fixpunkte des 3-Zyklus vertauscht. Also sind es 20 verschiedene Permutationen dieser Form.[2]

---

[1] Die Trägermenge einer Permutation ist die Menge ihrer Nicht-Fixpunkte.

[2] Ebensogut hätten wir argumentieren können, daß man aus jeder Transposition durch Multiplikation mit einem von zwei möglichen 3-Zyklen eine Permutation der gewünschten Form bekommen kann; insbesondere sieht man an diesem Argument direkt, daß es in S_5 doppelt so viele 3-Zyklen wie Transpositionen geben muß.

Insgesamt haben wir also $24 + 20 = 44$ Permutationen ohne Fixpunkt in S_5.

Zur Kontrolle berechnen wir die Summe aller Ergebnisse – da jede Permutation in S_5 zwischen 0 und 5 Fixpunkten hat, müssen wir insgesamt alle Permutationen in S_5 erwischt haben. Und tatsächlich ist $1+0+10+20+45+44 = 120$, und da S_5 genau $5! = 120$ Elemente hat, sind uns keine Permutationen durch die Lappen gegangen.

Aufgabe 4.

a) Zur Ermittlung der Fehlstände von σ gehen wir systematisch vor:

- Ein Paar $(1, a)$, dessen erster Eintrag 1 ist, ist genau dann ein Fehlstand von σ, wenn $a > 1$, aber $\sigma(a) < \sigma(1) = 6$ ist. Dies trifft zu für $a = 2, 3, 4, 5, 6$, also haben wir schon die ersten fünf Fehlstände
$$(1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (1, 5),\ (1, 6)$$
gefunden.
- Ebenso ist ein Paar $(2, a)$ mit erstem Eintrag 2 genau dann ein Fehlstand von σ, wenn $a > 2$, aber $\sigma(a) < \sigma(2) = 2$ ist. Dies trifft nur für $a = 3$ zu, also haben wir einen einzigen weiteren Fehlstand
$$(2, 3)$$
gefunden.
- Ein Paar $(3, a)$ ist genau dann Fehlstand von σ, wenn $a > 3$, aber $\sigma(a) < \sigma(3) = 1$ ist. Dies trifft für kein a zu, also sind keine neuen Fehlstände zu verzeichnen.
- Ein Paar $(4, a)$ ist Fehlstand von σ, wenn $a > 4$, aber $\sigma(a) < \sigma(4) = 5$ ist. Dies stimmt für $a = 5, 6$, also haben wir zwei neue Fehlstände
$$(4, 5),\ (4, 6).$$
- Ein Paar $(5, a)$ ist schließlich Fehlstand, wenn $a > 5$, aber $\sigma(a) < \sigma(5) = 3$ ist. Dies kommt nicht vor, da der einzige Kandidat $a = 6$ das Bild $\sigma(6) = 4 > 3$ hat.

Insgesamt hat σ also $5 + 1 + 2 = 8$ Fehlstände.

b) Wir geben nur die Tabelle an:

σ	Fehlstände	Anzahl der Fehlstände
id	keine	0
$(1\ \ 2)$	$(1, 2)$	1
$(1\ \ 3)$	$(1, 2),\ (1, 3)\ (2, 3)$	3
$(2\ \ 3)$	$(2, 3)$	1
$(1\ \ 2\ \ 3)$	$(1, 3),\ (2, 3)$	2
$(1\ \ 3\ \ 2)$	$(1, 2),\ (1, 3)$	2

(Daß hier die *geraden* Permutationen eine *gerade* Anzahl von Fehlständen haben, ist kein Zufall, sondern ein allgemeines Gesetz; ebenso haben die *ungeraden* Permutationen eine *ungerade* Anzahl von Fehlständen.)

c) Die Fehlstände von $\tau = (k\ \ell)$ sind genau die Paare
$$\begin{array}{l} (k, k+1),\ (k, k+2),\ \ldots,\ (k, \ell - 1) \\ (k, \ell) \\ (k+1, \ell),\ (k+2, \ell),\ \ldots,\ (\ell - 1, \ell). \end{array}$$

Dies sind bei sorgfältiger Zählung $(\ell - k - 1) + 1 + (\ell - k - 1) = 2 \cdot (\ell - k) - 1$ Fehlstände. (Man beachte, daß diese Zahl stets ungerade ist, in Übereinstimmung mit der am Ende von b) erwähnten Gesetzmäßigkeit.)

d) Eine ganz einfache obere Schranke für die Anzahl der Fehlstände ist die gesamte Anzahl von Paaren (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$, und diese beträgt $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. (Für $n = 1$ beträgt diese Anzahl 0, vgl. dazu die Definition aus Aufgabe 1 b) vom 12. Tutoriumsblatt.)

Kommt diese Zahl als Fehlstandszahl vor? Gibt es also eine Permutation, für die *jedes* Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ ein Fehlstand ist? Ja, nämlich eine Permutation, die *alle* Größer-Kleiner-Relationen umkehrt und aus $i < j$ *immer* $\sigma(i) > \sigma(j)$ macht. Die einzige Permutation, die das tut, ist diejenige, die die Reihenfolge der Zahlen $1, \ldots, n$ umdreht, also

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$