

Grundlagen der Mathematik I – 13. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Kombinatorik).

- Vier Touristen wollen in einem Hotel übernachten, in dem noch sieben Zimmer frei sind. Wie viele Belegungsmöglichkeiten gibt es, wenn die Zimmer i) nur als Einzelzimmer, ii) auch als Mehrbettzimmer vergeben werden?
- Für den Hotelier ist es nur von Interesse, welche Zimmer mit wie vielen Touristen belegt sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür jeweils?

Aufgabe 2 (Permutationen). Gegeben seien die beiden Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Man berechne $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ sowie die Inversen σ^{-1} und τ^{-1} .
- Man bestimme Permutationen $\alpha, \beta \in S_8$ mit $\sigma \circ \alpha = \tau$ und $\beta \circ \sigma = \tau$.
- Man stelle σ und τ als Produkte von Zyklen bzw. als Produkte von Transpositionen dar.
- Man bestimme $\text{sign}(\sigma)$ und $\text{sign}(\tau)$.

Aufgabe 3 (Fixpunkte von Permutationen). Für jedes $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$ bestimme man die Anzahl der Permutationen in S_5 mit genau k Fixpunkten.

Aufgabe 4 (Fehlstände von Permutationen). Es sei $n \in \mathbb{N}$, $M = \{1, \dots, n\}$. Ist $\sigma \in S_n$ eine Permutation, so heißt ein Paar $(i, j) \in M \times M$ ein *Fehlstand* von σ , wenn $i < j$, aber $\sigma(i) > \sigma(j)$ ist.

- Man bestimme die Fehlstände von

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_6.$$

- Man bestimme für jedes $\sigma \in S_3$ die Anzahl der Fehlstände.
- Man bestimme die Anzahl der Fehlstände der Transposition $\tau = (k \ \ell) \in S_n$, wobei $1 \leq k < \ell \leq n$ sei.
- Wieviele Fehlstände kann eine Permutation $\sigma \in S_n$ höchstens haben? Man gebe (für jedes $n \in \mathbb{N}$) ein Beispiel $\sigma \in S_n$ an, das diese maximale Anzahl an Fehlständen besitzt.