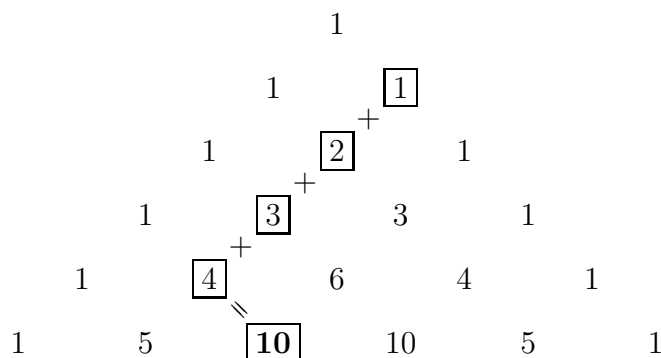


Grundlagen der Mathematik I

Lösungsvorschlag zum 12. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

- a) Die Formel besagt, daß die Summe der umrahmten Zahlen im Pascalschen Dreieck (hier für $k = 1$, $n = 4$)



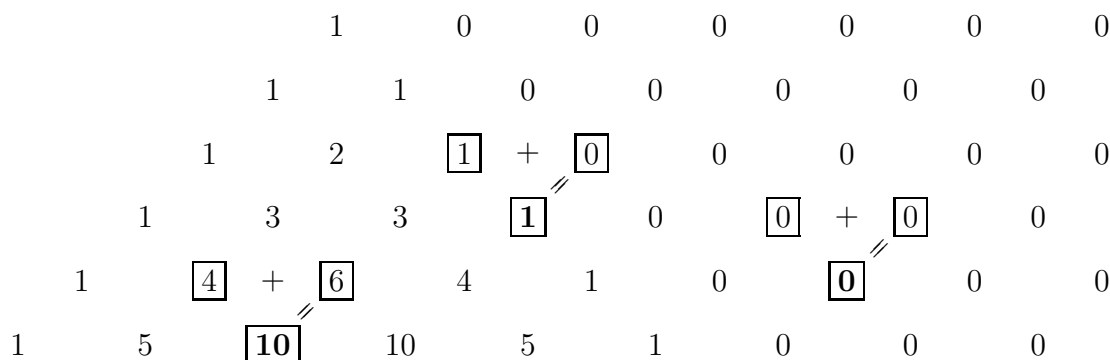
die fettgedruckte umrahmte Zahl ergibt, und Analoges für jede andere Summe entlang einer solche Diagonalen, die am rechten Rand des Dreiecks beginnt.

- b) Die behauptete Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

wurde in der Vorlesung schon für $1 \leq k \leq n$ bewiesen, so daß wir uns nur noch um den Fall $k \geq 1$, $n < k$ kümmern müssen. Dann ist aber $\binom{n}{k} = 0$ nach unserer Festlegung, und es ist nur zu zeigen, daß $\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ gilt. Hier gibt es nun zwei Fälle: Ist $n < k - 1$, so gilt auch $n + 1 < k$, und beide Seiten ergeben 0. Andernfalls ist $n = k - 1$, und dann liefert die linke Seite $\binom{k-1}{k-1} = 1$ sowie die rechte $\binom{k}{k} = 1$, so daß die beiden Seiten auch hier übereinstimmen.

Das Pascalsche Dreieck ist durch unsere zusätzliche Dimension nach rechts durch einen (unendlichen) Haufen von Nullen ergänzt worden; die Formel besagt nun, daß auch in diesem ergänzten Dreieck jeder Eintrag die Summe der beiden direkt darüberstehenden ist:



- c) Da die Rekursionsformel für die Fibonacci-Folge immer auf die letzten zwei Folgenglieder zurückgreift, werden wir auch den Induktionsanfang für die ersten *zwei* Fälle bereitstellen müssen: Für $n = 0$ ist

$$\sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i} = \sum_{i=0}^0 \binom{0-i}{i} = \binom{0}{0} = 1 = x_1,$$

und für $n = 1$ ist

$$\sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i} = \sum_{i=0}^1 \binom{1-i}{i} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1 = x_2.$$

Für den Induktionsschritt $0, 1, \dots, n \rightarrow n+1$ sei nun $n \geq 1$ und die Behauptung für $0, 1, \dots, n$ bewiesen. Zu untersuchen ist nun das Folgenglied $x_{(n+1)+1} = x_{n+2}$, und unter Verwendung der Rekursionsformel für die Fibonacci-Zahlen können wir rechnen:

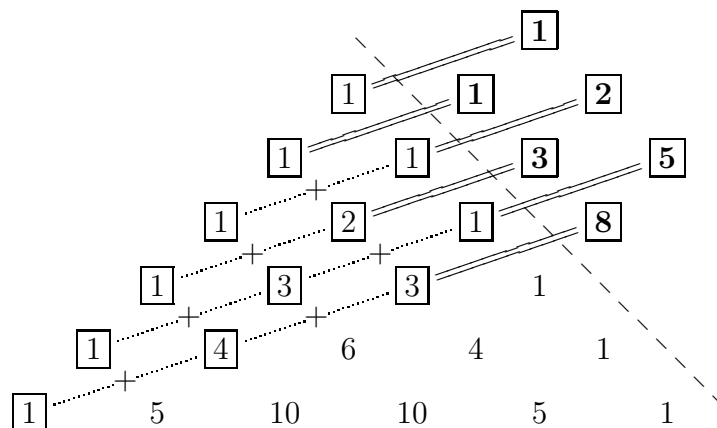
$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_n + x_{n+1} && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden...)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{(n-1)-i}{i} + \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i} && \text{(Indexverschiebung...)} \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{(n-1)-(i-1)}{i-1} + \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i} && \text{(Summen zusammenfassen...)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \binom{n-i}{i-1} + \binom{n-i}{i} \right) + \binom{n-0}{0} && \text{(Formel aus b)...)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \binom{n+1-i}{i} \right) + 1 \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1-i}{i}, \end{aligned}$$

und das ist die behauptete Gleichung für $n+1$. Im Umformungsschritt (*) haben wir dabei verwendet, daß

$$1 = \binom{n+1-0}{0} \quad \text{und} \quad \binom{n+1-(n+1)}{n+1} = 0$$

gilt.

Für die Veranschaulichung dieser Aussage lasse ich die in b) eingezeichneten Nullen weg, weil sie den Wert einer Summe nicht mehr ändern. Dann bedeutet unsere Formel:



Aufgabe 2.

- a) Genau zu jeder Menge von zweien der 20 Personen findet ein Händedruck statt; es gibt also so viele Händedrucke wie zweielementige Teilmengen einer Menge mit 20 Elementen, und deren Anzahl beträgt

$$\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190.$$

- b) Eine mögliche Art zu zählen wäre die folgende: Verabschiedet sich ein Ehepaar von einem anderen, werden $2 \cdot 2 = 4$ Händedrucke ausgetauscht. Das passiert genau so oft, wie Mengen aus zwei Ehepaaren gibt, also $\binom{15}{2}$ mal. Insgesamt werden also

$$4 \cdot \binom{15}{2} = 4 \cdot \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 420$$

Händedrucke ausgetauscht.

Alternative Zählweise: Die Situation ist wie in a) mit 30 Personen, mit dem Unterschied, daß sich Eheleute nicht voneinander verabschieden, weil sie ja gemeinsam nach Hause gehen. Von allen $\binom{30}{2}$ möglichen Händedruckpaaren finden also 15 nicht statt, so daß zu insgesamt

$$\binom{30}{2} - 15 = \frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1} - 15 = 420$$

Händedrücken kommt.

Verschiedene Möglichkeiten, die selbe kombinatorische Größe zu zählen, führen oft zu eleganten Beweisen für Formeln mit Binomialkoeffizienten: Verallgemeinern wir von 15 auf n Ehepaare, so beweisen unsere beiden Zählvarianten die Formel

$$4 \cdot \binom{n}{2} = \binom{2n}{2} - n \quad \text{für alle } n \geq 0$$

(die man natürlich auch direkt rechnerisch überprüfen, aber vielleicht nicht so leicht entdecken könnte).

- c) Bei jedem Abschied eines Ehepaars von einem anderen werden 4 **Küßchen** ausgetauscht (zwei unter den Damen, jeweils einer vom einen Herrn an die andere Dame und umgekehrt). Da wir schon gesehen haben, daß $\binom{15}{2}$ Abschiede von Ehepaaren stattfinden, werden insgesamt

$$4 \cdot \binom{15}{2} = 4 \cdot \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 420$$

Küßchen gegeben.

Ebenso finden bei jedem Abschied zweier Ehepaare drei Händedrucke statt (nämlich je einer zwischen allen Kombinationen außer den beiden Damen). Damit werden insgesamt

$$3 \cdot \binom{15}{2} = 3 \cdot \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 315$$

Händedrucke getauscht.

Aufgabe 3.

- a) (i) Bei **unterscheidbaren** hat jeder Autofahrer nacheinander die freie Wahl zwischen den drei Spuren; insgesamt gibt es dafür $3^{13} = 1.594.323$ Möglichkeiten.

Begründung am Urnenmodell: Die Entscheidung eines Autofahrers für eine Spur ist das Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit drei Kugeln = Spuren mit Zurücklegen (denn eine Spur wird nicht „verbraucht“, wenn ein Autofahrer sich für sie entschieden hat) mit Beachtung der Reihenfolge (denn wir vermerken, *welches* Auto sich gerade für eine Spur entschieden hat). Für das Ziehen von $k = 13$ Kugeln aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln mit Zurücklegen und Beachtung der Reihenfolge gibt es laut Vorlesung $n^k = 3^{13}$ Möglichkeiten.

- (ii) Bei **nicht unterscheidbaren** Autos wird eine Konfiguration nur dadurch beschrieben, an welcher Spur wieviele Autos stehen (ohne daß es darauf ankäme, *welches* Auto nun genau auf welcher Spur steht); im Urnenmodell von (i) äußert sich diese Änderung darin, daß nunmehr *ohne* Beachtung der Reihenfolge gezogen wird. Für das Ziehen von $k = 13$ Kugeln aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge gibt es aber laut Vorlesung

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+13-1}{13} = \binom{15}{13} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105$$

Möglichkeiten.

- b) (i) Bei **unterscheidbaren** Autos hat der erste ankommende Fahrer die freie Wahl zwischen drei Spuren; der nächste nur noch die Wahl zwischen den beiden Spuren, die noch frei sind, und der dritte ankommende Fahrer fährt dann an die noch freie Spur. Danach steht an jeder Spur genau ein Auto, und für die nächsten Autofahrer wiederholt sich das Spiel (für ihre Entscheidung ist es egal, wieviele vollständige Reihen schon vorne an der Ampel stehen). Insgesamt gibt es also

$$\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3}_{13 \text{ Autos}} = 3^5 \cdot 2^4 \cdot 1^4 = 3.888$$

mögliche Konfigurationen.

- (ii) Bei **nicht unterscheidbaren** Autos wird der Vorgang genauso ablaufen, wie unter (i) beschrieben – am Ende werden also die ersten 12 Autos sich gleichmäßig auf die drei Spuren verteilt haben (dafür gibt es, bei nicht unterscheidbaren Autos, nur eine einzige Möglichkeit!), und das dreizehnte Auto hat die Wahl zwischen einer der Spuren. Insgesamt gibt es hier also 3 Möglichkeiten, die sich nur durch die Spur unterscheiden, auf dem das dreizehnte Auto steht.

Aufgabe 4.

- a) Es ist

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Insbesondere sieht man, daß $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$ ist.) Außerdem ergibt sich

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- b) Wir erhalten

$$\sigma^1 = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^4 = \sigma^3 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \text{id}.$$

Damit ergibt sich weiter $\sigma^5 = \sigma^4 \circ \sigma = \text{id} \circ \sigma = \sigma$, entsprechend $\sigma^6 = \sigma^2$ usw., und die allgemeinen Formeln lautet: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}\sigma^{4k} &= (\sigma^4)^k = \text{id}^k = \text{id}, \\ \sigma^{4k+1} &= \sigma^{4k} \circ \sigma = \text{id} \circ \sigma = \sigma, \\ \sigma^{4k+2} &= \sigma^{4k} \circ \sigma^2 = \text{id} \circ \sigma^2 = \sigma^2, \\ \sigma^{4k+3} &= \sigma^{4k} \circ \sigma^3 = \text{id} \circ \sigma^3 = \sigma^3.\end{aligned}$$

Für die Potenzen von τ erhalten wir

$$\begin{aligned}\tau^1 &= \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \tau^2 &= \tau \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \\ \tau^3 &= \tau^2 \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \text{id}.\end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ heißt das

$$\begin{aligned}\tau^{3k} &= (\tau^3)^k = \text{id}^k = \text{id}, \\ \tau^{3k+1} &= \tau^{3k} \circ \tau = \text{id} \circ \tau = \tau, \\ \tau^{3k+2} &= \tau^{3k} \circ \tau^2 = \text{id} \circ \tau^2 = \tau^2.\end{aligned}$$