Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

# Grundlagen der Mathematik I – 12. Tutoriumsblatt

**Aufgabe 1 (Pascalsches Dreieck und Fibonaccizahlen).**

a) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$. Man veranschauliche im Pascalschen Dreieck die Formel

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{für alle } n \geq k,$$

die auf dem 11. Übungsblatt, Aufgabe 2 b), bewiesen wird.

b) In der Vorlesung wurde der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ nur für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definiert. Wir erweitern die Definition nun auf *alle* $n, k \in \mathbb{N}_0$ durch die Festlegung

$$\binom{n}{k} := 0, \quad \text{falls } k > n \text{ ist.}$$

Man zeige, daß dann die Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

für *alle* $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k \geq 1$ gilt, und veranschauliche sie im Pascalschen Dreieck.

c) Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonaccizahlen (für die Definition siehe Vorlesung oder 11. Tutoriumsblatt, Aufgabe 3). Man zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} \quad \text{(mit der Konvention aus b).)}$$

und veranschauliche auch diese Gleichung im Pascalschen Dreieck.

**Aufgabe 2 (Kombinatorik I).**

a) 20 Personen verabschieden sich voneinander mit Händedruck. Jeder geht alleine nach Hause. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

b) 15 Ehepaare verabschieden sich voneinander mit Händedruck und gehen paarweise nach Hause. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

c) Die 15 Ehepaare verabschieden sich folgendermaßen: die Herren von den Herren mit Händedruck, die Damen von den Damen mit Küßchen auf beide Wangen, die Damen von den Herren mit Händedruck und Küßchen auf die rechte Wange. Die Ehepaare gehen wieder paarweise nach Hause. Wieviele Küßchen werden gegeben? Wie oft werden die Hände gedrückt?

**Aufgabe 3 (Kombinatorik II).** In einer Einbahnstraße mit drei zunächst leeren Fahrspuren schaltet die Ampel auf Rot. Bis zur nächsten Grünphase kommen nacheinander 13 Autos an dieser Ampel zum Stehen.

a) Auf wie viele verschiedene Möglichkeiten können sich die 13 nacheinander eintreffenden Autos auf die drei Fahrspuren aufteilen, wenn die Autos i) unterschieden bzw. ii) nicht unterschieden werden?

b) Wie viele solcher Aufteilungen gibt es jeweils, wenn jeder Fahrer eine Fahrspur ansteuert, an der noch möglichst wenige Autos stehen?

**Aufgabe 4 (Permutationen).** Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_6.$$

a) Man berechne $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ sowie die Inversen $\sigma^{-1}$ und $\tau^{-1}$.

b) Man bestimme die Potenzen $\sigma^n$ und $\tau^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 22.–24. Januar 2014 behandelt.