Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I – 11. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Rekursiv definierte Folgen). Gegeben sei die durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Man bestimme die ersten fünf Folgenglieder. Welche Vermutung liegt nahe?

b) Man beweise die unter a) vermutete explizite Darstellung von a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 (Binomialkoeffizienten). Man zeige für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n$ die Beziehung

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

und beweise damit für alle $x \in \mathbb{R}$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n\,x.$$

Aufgabe 3 (Fibonacci-Zahlen). Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen (die definiert ist durch $x_1 = x_2 = 1$ und $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ für $n \ge 2$). Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Formeln:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = x_{n+2} - 1$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{2k} = x_{2n+1} - 1$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{2k-1} = x_{2n}$

Aufgabe 4 („Geometrische Fibonacci-Folgen“). Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n := a^n$. Wie muß a gewählt sein, damit für die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Rekursionsformel

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1} \quad \text{für alle } n \ge 2$$

gilt?

Folgen der Form $y_n = a^n$ für ein $a \in \mathbb{R}$ nennt man „geometrische Folgen“, und Folgen, die die angegebene Rekursionsformel erfüllen, nennt man „verallgemeinerte Fibonacci-Folgen“. Die Aufgabe lautet also kurz: Welche geometrischen Folgen sind verallgemeinerte Fibonacci-Folgen?

Auf dem Übungsblatt werden wir sehen, wie man mit Hilfe dieser Aufgabe die explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen *herleiten* kann, die in der Vorlesung (5.20) einfach *angegeben* wurde.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 15.–17. Januar 2014 behandelt.