Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 10. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Die Aussage ist **wahr**: Gilt nämlich $b \mid a_1$, also $a_1 = b \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, und $b \mid a_1 + a_2$, also $a_1 + a_2 = b \cdot \ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}_0$, so folgt

$$a_2 = (a_1 + a_2) - a_1 = b \cdot \ell - b \cdot k = b \cdot (\ell - k),$$

also $b \mid a_2$.

b) Die Aussage ist ebenfalls **wahr**: Gilt nämlich etwa $b \mid a_1$, also $a_1 = b \cdot k_1$ für ein $k_1 \in \mathbb{N}_0$, so folgt $a_1 \cdot a_2 = (b \cdot k_1) \cdot a_2 = b \cdot (k_1 \cdot a_2)$, also $b \mid a_1 \cdot a_2$. Der Fall, daß stattdessen $b \mid a_2$ gilt, wird entweder genauso behandelt, oder man bemerkt, daß er sich aus dem schon bewiesenen Fall ergibt durch Vertauschen von a_1 und a_2. (Vgl. dazu den Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt, Aufgabe 3 b).)

c) Die Aussage ist **falsch**: Beispielsweise für $b = 12$, $a_1 = 3$ und $a_2 = 8$ gilt zwar $b \mid a_1 \cdot a_2$ (denn $12 \mid 24$), jedoch weder $b \mid a_1$ noch $b \mid a_2$ (denn $12 \nmid 3$ und $12 \nmid 8$).

Aufgabe 2. Wir beweisen alle diese Aussagen durch Induktion nach n.

a) Für den **Induktionsanfang** $n = 0$ ist $4n^3 - n = 0$ ein Vielfaches von 3.

Für den **Induktionsschritt** $n \to n + 1$ nehmen wir an, daß $n \geq 0$ ist und $3 \mid (4n^3 - n)$ gilt, also $4n^3 - n = 3 \cdot k$ mit einem $k \in \mathbb{N}_0$ (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist, daß dann auch $4(n + 1)^3 - (n + 1)$ durch 3 teilbar ist. Aber es ist

$$\begin{aligned} 4(n+1)^3 - (n+1) &= 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n + 1) \\ &= 4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3 \\ &= 3 \cdot k + 3 \cdot (4n^2 + 4n + 1) \\ &= 3 \cdot (k + 4n^2 + 4n + 1), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

b) Für den **Induktionsanfang** $n = 0$ ist $5^n + 7 = 5^0 + 7 = 8$ ein Vielfaches von 4.

Für den **Induktionsschritt** $n \to n + 1$ nehmen wir an, daß $n \geq 0$ ist und $4 \mid (5^n + 7)$ gilt, also $5^n + 7 = 4 \cdot k$ mit einem $k \in \mathbb{N}_0$ (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist, daß dann auch $5^{n+1} + 7$ durch 4 teilbar ist. Aber es ist

$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 7 &= 5 \cdot 5^n + 7 \\ &= 5 \cdot (4 \cdot k - 7) + 7 \\ &= 20 \cdot k - 28 \\ &= 4 \cdot (5 \cdot k - 7), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

c) Für den **Induktionsanfang** $n = 0$ ist $a^{2n+1} - a = a - a = 0$ für jedes $a \in \mathbb{N}_0$ durch 6 teilbar.

Für den **Induktionsschritt** $n \to n+1$ nehmen wir an, daß $n \geq 0$ und $a \in \mathbb{N}_0$ ist und $6 \mid (a^{2n+1} - a)$ gilt, also $a^{2n+1} - a = 6k$ mit einem $k \in \mathbb{N}_0$ (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist, daß dann auch $a^{2(n+1)+1} - a$ durch 6 teilbar ist. Aber es ist

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)+1} - a &= a^{2n+3} - a \\ &= a^2 \cdot a^{2n+1} - a \\ &= a^2 \cdot (6k + a) - a \\ &= 6k \cdot a^2 + \underbrace{a^3 - a}_{(*)}. \end{aligned}$$

Für den Ausdruck $(*)$ wurde nun aber bereits in der Vorlesung gezeigt, daß $a^3 - a$ stets durch 6 teilbar ist[1], also $a^3 - a = 6 \cdot \ell$ mit einem $\ell \in \mathbb{N}_0$. Damit können wir unseren Ausdruck weiter umformen zu

$$\begin{aligned} \ldots &= 6k \cdot a^2 + 6 \cdot \ell \\ &= 6 \cdot (k \cdot a^2 + \ell), \end{aligned}$$

und das zeigt die Behauptung.

Aufgabe 3.

a) Es ist

$$a = (731)_9 = \mathbf{7} \cdot 9^2 + \mathbf{3} \cdot 9^1 + \mathbf{1} \cdot 9^0 = 7 \cdot 81 + 3 \cdot 9 + 1 = 595$$

(dieses Resultat kann man natürlich auch als $(595)_{10}$ schreiben). Zur Darstellung von $a = 595$ im 4-adischen Zahlensystem bestimmen wir zunächst die größte Potenz von 4, die nicht größer ist als die Zahl a: Wegen

$$\begin{aligned} 4^0 &= 1, \\ 4^1 &= 4, \\ 4^2 &= 16, \\ 4^3 &= 64, \\ 4^4 &= 256, \\ 4^5 &= 1024 > a \end{aligned}$$

ist dies $4^4 = 256$, wir werden also fünf Ziffern (für die Stellen mit Wert 4^0, 4^1, 4^2, 4^3 und 4^4) benötigen. Nun dividieren wir, unter Verwendung unserer Liste der Potenzen von $b = 4$, wiederholt mit Rest:

$$\begin{aligned} 595 &= \mathbf{2} \cdot 4^4 + 83 \\ &= \mathbf{2} \cdot 4^4 + \mathbf{1} \cdot 4^3 + 19 \\ &= \mathbf{2} \cdot 4^4 + \mathbf{1} \cdot 4^3 + \mathbf{1} \cdot 4^2 + 3 \\ &= \mathbf{2} \cdot 4^4 + \mathbf{1} \cdot 4^3 + \mathbf{1} \cdot 4^2 + \mathbf{0} \cdot 4^1 + 3 \\ &= \mathbf{2} \cdot 4^4 + \mathbf{1} \cdot 4^3 + \mathbf{1} \cdot 4^2 + \mathbf{0} \cdot 4^1 + \mathbf{3} \cdot 4^0, \end{aligned}$$

also $a = 595 = (21103)_4$.

[1] Ein direkter Beweis dieser Aussage läßt sich, zumindest wenn man die Eigenschaften der Primfaktorzerlegung kennt, folgendermaßen führen: Es ist $a^3 - a = a \cdot (a^2 - 1) = (a - 1) \cdot a \cdot (a + 1)$ ein Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Von diesen ist aber stets mindestens eine durch 3 teilbar und mindestens eine gerade; ihr Produkt enthält also die Primfaktoren 2 und 3 und ist damit durch 6 teilbar.

b) Es ist

$$\begin{aligned} a &= (10010101)_2 \\ &= \mathbf{1}\cdot 2^7 + \mathbf{0}\cdot 2^6 + \mathbf{0}\cdot 2^5 + \mathbf{1}\cdot 2^4 + \mathbf{0}\cdot 2^3 + \mathbf{1}\cdot 2^2 + \mathbf{0}\cdot 2^1 + \mathbf{1}\cdot 2^0 \\ &= 128 + 16 + 4 + 1 \\ &= 149 \quad (= (149)_{10}) \end{aligned}$$

Zur Darstellung von $a = 149$ im 9-adischen Zahlensystem bestimmen wir zunächst die Potenzen von 9, bis wieder die Zahl a überschritten haben:

$$\begin{aligned} 9^0 &= 1, \\ 9^1 &= 9, \\ 9^2 &= 81, \\ 9^3 &= 729 > a. \end{aligned}$$

Nun dividieren wir, unter Verwendung unserer Liste der Potenzen von $b = 4$, wiederholt mit Rest:

$$\begin{aligned} 149 &= \mathbf{1}\cdot 9^2 + 68 \\ &= \mathbf{1}\cdot 9^2 + \mathbf{7}\cdot 9^1 + 5 \\ &= \mathbf{1}\cdot 9^2 + \mathbf{7}\cdot 9^1 + \mathbf{5}\cdot 9^0 \\ &= (175)_9. \end{aligned}$$

c) Es ist

$$a = (17)_{20} = \mathbf{1}\cdot 20^1 + \mathbf{7}\cdot 20^0 = 20 + 7 = 27 \quad (= (27)_{10})$$

und wegen $16^0 = 1$, $16^1 = 16$, $16^2 = 256 > a$ können wir nun rechnen:

$$\begin{aligned} 27 &= \mathbf{1}\cdot 16^1 + 11 \\ &= \mathbf{1}\cdot 16^1 + \mathbf{11}\cdot 16^0 \\ &= (1B)_{16}, \end{aligned}$$

da ja vereinbarungsgemäß im Sechzehnersystem (Hexadezimalsystem) die „Ziffern“ mit den Werten $10, 11, \ldots, 15$ durch die Buchstaben $A, B, \ldots, F$ bezeichnet werden.

Aufgabe 4.

a) Für die Bestimmung von $|B_n|$ gibt es mehrere Möglichkeiten:

- B_n besteht genau aus den Dualzahlen zwischen

$$(\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ Ziffern}})_2 = 0 \quad \text{und} \quad (\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ Ziffern}})_2$$

Zur Bestimmung des Wertes der zweiten Zahl kann man entweder direkt unter Verwendung der geometrischen Summenformel

$$(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ Ziffern}})_2 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2^0 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

rechnen, oder man bemerkt[2]

$$(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ Ziffern}})_2 = (\underbrace{100\ldots0}_{n \text{ Nullen}})_2 - 1 = 2^n - 1.$$

Wie auch immer man den Wert nun bestimmt hat: B_n besteht genau aus den Zahlen zwischen 0 und $2^n - 1$; das sind 2^n Zahlen, also ist $|B_n| = 2^n$.

[2] inspiriert von der im Zehnersystem vertrauten Beziehung $99\ldots9 = 100\ldots0 - 1$

- Die Elemente von B_n sind genau die Dualzahlen, die sich mit n Ziffern schreiben lassen. Jede Ziffer kann entweder 0 oder 1 sein, also gibt es insgesamt

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ zu wählende Ziffern}} = 2^n$$

solche Zahlen, d.h. $|B_n| = 2^n$.

b) Wie kann man aus einem Element von $\mathcal{P}(M)$, also einer Teilmenge $X \subset M$, eine n-stellige Dualzahl zuordnen? Die Idee ist einfach: Die Menge M hat die Elemente $x_0, \ldots, x_{n-1}$; jedem dieser Elemente ordnen wir eine der n Stellen unserer Dualzahl zu, und diese Stelle belegen wir mit der Ziffer 1, wenn das Element in X enthalten ist, und mit der Ziffer 0, wenn nicht.

Ein Beispiel macht die Situation klarer: Für $n = 3$ ist $M = \{x_0, x_1, x_2\}$; wenn wir dem Element x_0 die letzte, dem Element x_1 die mittlere und dem Element x_2 die erste Ziffer einer dreistelligen Dualzahl zuordnen, liefert die beschriebene Vorschrift die folgende Abbildung $f : \mathcal{P}(M) \to B_3$:

X	$f(X)$
$\emptyset$	$(000)_2$
$\{x_0\}$	$(001)_2$
$\{x_1\}$	$(010)_2$
$\{x_2\}$	$(100)_2$
$\{x_0, x_1\}$	$(011)_2$
$\{x_0, x_2\}$	$(101)_2$
$\{x_1, x_2\}$	$(110)_2$
$\{x_0, x_1, x_3\}$	$(111)_2$

Hier kann man direkt überprüfen, daß die erhaltene Abbildung auch tatsächlich bijektiv ist.

Formal notieren kann man das im allgemeinen Fall beispielsweise folgendermaßen: Für $0 \le i < n$ und eine Teilmenge $X \subset M$ setzen wir

$$a_i^{(X)} := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i \in X \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls } x_i \notin X \text{ ist.} \end{cases}$$

Nun können wir eine Abbildung $f : \mathcal{P}(M) \to B_n$ definieren, indem wir die Ziffern $a_i^{(X)}$ zu einer Dualzahl zusammensetzen, also durch die Vorschrift

$$X \mapsto (a_{n-1}^{(X)} a_{n-2}^{(X)} \ldots a_1^{(X)} a_0^{(X)})_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(X)} \cdot 2^i.$$

Die Abbildung f ist *injektiv*, denn sind $X, Y \subset M$ Teilmengen mit $f(X) = f(Y)$, so ist

$$(a_{n-1}^{(X)} a_{n-2}^{(X)} \ldots a_1^{(X)} a_0^{(X)})_2 = (a_{n-1}^{(Y)} a_{n-2}^{(Y)} \ldots a_1^{(Y)} a_0^{(Y)})_2,$$

aufgrund der Eindeutigkeit der Dualzahldarstellung also $a_i^{(X)} = a_i^{(Y)}$ für alle $0 \le i < n$, und das bedeutet $x_i \in X \iff x_i \in Y$ für alle i, d.h. $X = Y$.

Die Abbildung f ist *surjektiv*, denn ist $a = (a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_2 \in B_n$ eine beliebige Dualzahl mit n Ziffern, so können wir die Teilmenge

$$X := \{x_i \,|\, 0 \le i < n,\ a_i = 1\} \subset M$$

betrachten: Für sie gilt nach Konstruktion $a_i^{(X)} = 1 \iff a_i = 1$, also $a_i^{(X)} = a_i$ für alle $0 \le i < n$, und das bedeutet

$$f(X) = (a_{n-1}^{(X)} a_{n-2}^{(X)} \ldots a_1^{(X)} a_0^{(X)})_2 = (a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_2 = a.$$

c) In b) haben wir eine Bijektion $\mathcal{P}(M) \to B_n$ konstruiert, also ist $|\mathcal{P}(M)| = |B_n| \overset{\text{a)}}{=} 2^n$.